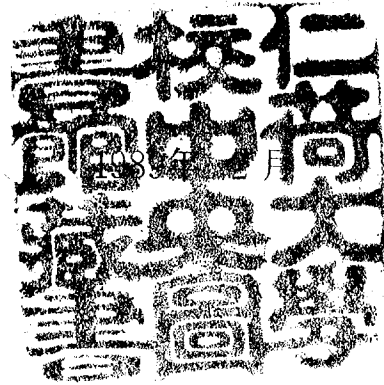


621.4022
95519

工學碩士學位 請求論文

유한요소법에서의 rp 형에 관한 연구

A rp Method in Finite Element Analysis



指導教授 柳 亨 善

이 論文을 碩士學位 論文으로 提出함

仁荷大學校 大學院

機械工學科 (固體 및 生産工學專攻)

安 象 鎬
05 5 5

이 論文을 安象鎬의 碩士學位 論文으로 認定함

1989年 2月 日

主 審 _____

副 審 _____

委 員 _____

ABSTRACT

During recent years, a great deal of interest has emerged on the use of adaptive processes and a posteriori estimates in finite element method. The results are intended to be used to improve the quality of finite element solution by changing the location of the nodes within a fixed number of degrees of freedom-so called r method-, and by increasing the order of polynomial approximation with the new degrees of freedom - p method.

This paper deals with error estimates that contains the basic theory and method of deriving error estimates and adaptive processes applied to finite element solutions underlying the rp method that is the combination of r and p methods of finite element. It is shown that we can obtain more accurate solution by applying the rp method to the 2-dimensional heat transfer problem.

요 약

최근 유한요소해의 정확도를 높이기 위해 적응해석법과 후오차해석에 대한 관심이 상당히 대두되고 있다. 그 결과로서 자유도수는 변화시키지 않고 결점의 위치를 변화시키고 (r -법), 새로운 자유도로 다항식의 근사치의 차수를 증가시키면서 (p -법) 유한요소해의 정확도를 높이게 되었다.

본 연구는 유한요소법의 r -법과 p -법의 조합인 rp -법을 사용하여 해의 오차에 대한 기본적인 이론과 오차를 계산하는 방법 및 적응해석법 등을 포함한 오차해석을 2차원 열전달 문제에 적용시킴으로서 보다 정확한 해를 얻었다.

기 호

- A_K : 요소의 면적
 h : 대류열전도 계수
 h_K : 요소의 길이
 H : Sobolev 공간
 k : 형상함수 차수
 k_x : x방향 열전달 계수, $W / m^2 \cdot ^\circ C$
 k_y : y방향 열전달 계수, $W / m^2 \cdot ^\circ C$
 M : 요소의 총수
 N_i : 형상함수
 n_x : x방향에서의 바깥방향 수직벡터성분
 n_y : y방향에서의 바깥방향 수직벡터성분
 Q : 내부열원
 T : 온도, $^\circ C$
 T_∞ : 대기온도, $^\circ C$
 v : Sobolev 공간에서의 부차적 공간
 X : 유한차원 공간
 X_K : 기하학적 중심
 ν : 반복 횟수
 Ω : 전체 영역

목 차

ABSTRACT

요 약

기 호

제 1 장 서 론	1
제 2 장 이론적 배경	3
2-1 오차 이론	3
2-2 적응 해석법	15
2-3 rp법	17
제 3 장 해석예	18
3-1 지배 방정식	18
3-2 유한요소법의 정식화	18
3-3 오차의 크기	21
3-4 적응 해석법	21
3-5 실행예	22
제 4 장 결과 및 고찰	25
제 5 장 결 론	34
REFERENCE	34

제 1 장 서 론

오늘날 유한요소법은 공학에서 다루어지는 다양한 형태의 미분 방정식을 해석하는데 많이 사용되고 있으며, 최근에는 보다 정확한 유한요소해를 얻기 위하여 많은 연구가 이루어지고 있다.

전·후오차해석법, 또는 적응해석법 등으로 일컬어지는 이러한 연구는 해석의 전·후에 발생하는 오차를 예견하며, 이를 수용할 수 있는 한계내에 있게하는 형태로 수행되고 있다.

1978년에 I. BABUSKA 와 W. C. RHEINBOLDT에 의해 후오차해석법⁽¹⁾ (a posteriori error analysis)이 제시되고 1979년에 유한요소분할에 대한 최적화방법을 제시한 이후 지금까지 후오차해석법과 적응해석법(adaptive analysis)에 관한 많은 연구가 진행되어 왔다. 이러한 해석법에는 몇가지 기본적인 방법⁽²⁾⁽³⁾이 있다.

첫째는 이미 존재하는 유한요소를 같은 형태의 요소로 세분한 것(h법)이고, 둘째는 유한요소의 형상함수 차수를 증가시키는 것(p법)이다. 셋째는 이 두가지를 혼합한 hp⁽⁴⁾법으로서 BABUSKA와 DORR에 의해서 이 방법이 순수한 h법이나 p법에 비해 훨씬 정도가 높은 해를 얻을 수 있음이 입증되었다. 그리고 자유도 수의 증가없이 유한요소의 절점의 위치를 최적인 위치로 변화시키는 r법이 있다.

본 연구에서는 자유도 수의 커다란 증가를 억제하고 요소의 수를 변화시키지 않는, r법과 p법을 혼합한 rp법을 지금까지 많은 연구에서 다른 방법의 적용시 사용해온 L형 영역에 열전달문제를 적용시킴으로서 r

법이나 p법을 사용했을 때와 rp법을 사용했을 때의 온도분포 변화상태, 오차의 수렴율 및 수렴속도를 비교 검토함으로써 rp법의 장점을 파악코져 하였다.

제 2 장 이론적 배경

2-1. 오차 이론

2-2-1 오차의 크기 (ERROR NORM)

유한요소법에서 중요시 하는 관점을 다음과 같은 형태의 미분방정식의 근사해의 정확도이다. 즉, 어떤 경계조건을 갖고 영역 Ω 에서 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$Lu = f \quad (1)$$

식(1)과 같은 문제는 $u \in V$ 에서 weak form 으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$a(u, v) = (f, v) \quad \text{for all } v \in V \quad (2)$$

여기에서, $a(u, v)$ 는 적절하게 정의되어진 쌍일차의 범함수이며 V 는 Sobolev 공간에서의 부차적 공간이다.

미분방정식의 해를 u 라하고 이에 대응하는 유한요소해를 u_h 라 할때, 근사치의 오차 $e = u - u_h$ 은 여러가지 norm의 형태로 표현될 수 있으며 가장 널리 사용되는 것은 다음과 같이 정의되어지는 에너지 norm이다.

$$\|v\|^2 = a(v, v) \quad (3)$$

또한 이러한 오차는 다음과 같은 조건을 만족하여야 한다.^{(5),(6)}

$$\|u - u_h\| \leq Ch^{\min(m-1, p)} \quad (4)$$

여기에서, h 는 가장 큰 요소의 직경이고, p 는 기본함수의 차수(선형일 때 $p=1$)이며, m 은 특이점(Singularity)에서의 차수의 크기이다.

유한요소법에서는 격자를 고정시키고 $p \rightarrow \infty$ 로 하는 것도 가능하다. 이것을 위해서 h 뿐만 아니라 p 의 향으로도 오차추정식을 나타내는 것이 필요하다. 이와같은 것은 BABUSKA와 DORR에 의하여 이루어졌으며 $p \rightarrow \infty$ 일 때 수렴함을 나타내는 것은 다음과 같다.

$$\|u - u_h\| \leq Ch^{\min(p, m-1)} p^{-(m-1)+\epsilon}, \epsilon > 0 \quad (5)$$

2-1-2 오차 추정법

물체를 여러 요소로 분할한 상태에서 특히 어떠한 한 요소에서 오차가 클 때 후오차해석(a posteriori estimates)을 어떻게 하여야 하는가를 예를 들어 설명하기로 한다.

A. 1차원에서의 오차추정

구간 $I_i(x_i, x_{i+1})$ 에서 오차 e 가 다음의 미분방정식을 만족시킨다고 가정한다.

$$Le = - \frac{d}{dx} a(x) \frac{de}{dx} + b(x)e = r \quad (6)$$

여기에서, $e(x_i) = 0,$

$$e(x_{i+1}) = 0$$

$$\int_{I_i} r_j(x) N_j dx = 0, \quad j = 2, 3, \dots, p \quad (7)$$

이제 (8)식과 같은 형태로 $\|e\|_{E(I_i)}$ 을 나타내 보기로 한다.

$$\|e\|_E^2 = c_i \int_{I_i} r_i^2 dx \quad (8)$$

고유치를 구하기 위하여 Rayleigh 방정식의 성질을 이용하면

$$\frac{\|e\|_{E(I_i)}^2}{\int_{I_i} (Le)^2 dx} \leq \frac{1}{\lambda_{\min}} = C_i \quad (9)$$

여기에서, λ_{\min} 는 $L_U = \lambda_U$ 의 가장 작은 고유치이다.

$a(x) = a, b(x) = 0$ 의 경우를 고려해보면

$$Lu = -a \frac{d^2u}{dx^2} \quad (10)$$

고유치 문제에 적용하면

$$-a \frac{d^2u}{dx^2} = \lambda u \text{ on } I_i \quad (11)$$

여기서 고유함수는 $\sin \frac{\pi}{h_i} (x - x_i)$ 이고 $h_i = x_{i+1} - x_i$ 이며 $\lambda_{\min} = (\pi^2 / h_i^2) a$ 이므로 (12)식을 얻을 수 있다.

$$C_i = h_i^2 / \pi^2 a \quad (12)$$

일반적인 경우에는 a, b 가 매끈할 때 a, b 가 I_i 에서 거의 상수이므로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\lambda_{\min} \geq \pi^2 / h_i^2 a_{\min} \quad (13)$$

여기에서, a_{\min} 은 I_i 에서 a 의 최소치이다.

$j = 2$ 일 경우

$$C_i \leq \frac{h_i^2}{\pi^2 a^4} = \frac{h_i^2}{\pi^2 a j^2} \quad (14)$$

이고

$j = 3$ 일 경우는

$$C_i \approx \frac{h_i^2}{\pi^2 a^9} = \frac{h_i^2}{\pi^2 a j^2} \quad (15)$$

그러므로 대략적으로 나타내면 다음과 같다.

$$C_i = \frac{h_i^2}{\pi^2 a p^2} \quad (16)$$

여기에서, p 는 사용된 다항식 해의 차수이다.

선형요소의 경우 Residual은 거의 상수이므로 π 를 12로 놓을 수 있다.

이상에서 언급한 것을 정리하면 오차의 크기 (Error Norm)는 다음과 같이 표현할 수 있다.⁽⁷⁾

$$\|e\|_E^2 = \sum_i \epsilon_i^2 = \sum_i \frac{h_i^2}{12 a_{\min} p^2} \int_{\Omega_i} r^2 dx \quad (18)$$

B. 2차원에서의 오차측정

(6)식을 풀기 위하여 $b=0$ 로 놓고 이차계층 형상함수 (Quadratic Hierarchic Shape Function)와 선형요소를 사용하면 (17)식으로부터 다음식을 얻는다.

$$\epsilon_i^2 = \frac{h_i^2}{12a} \int_{\Omega} (r/2)^2 d\Omega \quad (18)$$

여기에서, a 는 물질 상수이다.

이때 2개의 1차원에 기여하는 항은 다음과 같다.

$$\epsilon_{ii}^2 = \frac{h_i^2}{24a} \int_{\Omega} r^2 dx \quad (19)$$

Residual의 특이점에서의 영향은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$e = \alpha_1 [x^2 - (h/2)^2] + \alpha_2 [y^2 - (h/2)^2] \quad (20)$$

$$\frac{\partial e}{\partial x} = \alpha_1 2x, \quad \frac{\partial e}{\partial y} = \alpha_2 2y \quad (21)$$

따라서

$$\|e\|_E^2 = \int_{\Omega} a \left[\left(\frac{\partial e}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial e}{\partial y} \right)^2 \right] d\Omega = \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{3} h^4 a \quad (22)$$

모든 절점에서 오차가 0이고 2차원 미분 $\frac{\partial^2 e}{\partial x^2}$ 이 대략적으로 2차 미분에 의해 계산될 수 있다고 가정하면 다음식을 얻는다.

$$\alpha_1 = \frac{1}{2ha} J \quad (23)$$

여기에서, J 는 도함수의 Jump.

그러므로,

$$\alpha_1^2 = \frac{1}{4h^2 a^2} J^2 \quad (24)$$

그런데 왼쪽과 오른쪽의 점프의 중간값으로 J^2 의 값을 취하면 다음과 같아진다.

$$\alpha_1^2 = \frac{1}{8h^2a^2} (J_r^2 + J_l^2) \quad (25)$$

이와같은 방법으로

$$\alpha_2^2 = \frac{1}{8h^2a^2} (J_u^2 + J_d^2) \quad (26)$$

따라서,

$$\begin{aligned} \epsilon_{i2}^2 &= \frac{1}{24a} h^2 [\sum J_k^2] \\ &= \frac{h}{24a} \sum_k J_k^2 d \end{aligned} \quad (27)$$

을 얻을 수 있다.

그러므로 위에서 언급한 바와 같이 2차 선형요소의 오차를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\epsilon_i^2 = \epsilon_{i1}^2 + \epsilon_{i2}^2 = \frac{h^2}{24a} \int_{\Omega_i} r^2 d\Omega + \frac{h}{24a} \int_{\Gamma_k} J^2 d\Gamma \quad (28)$$

(28)식은 동일한 재측정에 의해 다음과 같이 변형할 수 있다.

$$\epsilon_i^2 = \frac{h_i^2}{24a} \int_{\Omega_i} (r - \bar{r})^2 d\Omega + \frac{h_i}{24a} \int_{\Gamma_k} J^2 d\Gamma \quad (29)$$

여기에서, \bar{r} 는 요소에서 Residual의 평균값 전체 영역에서, 그 합이 모든 요소에서 얻어질 수 있도록 다음과 같이 정

의된다.”.

$$\|e\|_{\mathcal{E}}^2 = \sum_i \varepsilon_i^2 \quad (30)$$

C. 에너지 norm을 이용한 오차의 추정

에너지 norm을 이용한 오차는 다음과 같이 정의된다.”

$$\|u - u_h\|_{\mathcal{E}, \Omega} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{U(u - u_h)} \quad (31)$$

여기에서, U 는 변형을 에너지

$\|u - u_h\|$ 는 오차제곱근의 평균치제곱과 밀접한 관련이 있다.

h 법과 p 법의 경우에는 다음과 같은 형태로 표현 될 수 있다.

$$\|u - u_h\|_{\mathcal{E}, \Omega} \leq k/N^\beta \quad (32)$$

여기에서, k, β 는 양의 상수이고, N 은 자유도의 수이다.

hp 법의 경우는 다음식과 같다.

$$\|u - u_h\|_{\mathcal{E}, \Omega} \leq k/\exp(rN^\theta) \quad (33)$$

여기에서, k, r, θ 은 양의 상수이다.

이러한 식들은 N 의 값이 매우 큰 경우에 매우 정확하다. 그러므로 N 값이 상당히 큰 경우에는 (32)식과 (33)식에서 (\leq)를 (\approx)로 놓을 수 있다.

2-1-3. 유한요소 근사값

이제 평형방정식을 다루는 2차 미분방정식을 고려해보자.

$$a(u, v) = F(v) \quad \text{for all } v \in V \quad (34)$$

여기에서, $a(\cdot, \cdot)$ 는 $V \times V$ 에서 선형, 연속인 쌍일차 범함수이고, $F(\cdot)$ 는 V 에서 유계 (bound) 된 선형형태이다.

여기서 (6)식의 정해를 u 라하고 이에 대응하는 유한요소해를 u_h 라 하면 u 가 충분히 매끈하다고 가정할 때 유한차원 공간 X_h 에서의 함수를 사용하여 보간이 가능하다. 이런 함수를 u_I 라 하면 모든 절점 b_j 에 대하여 u_I 는 다음식을 만족시킨다.

$$u_I(b_j) = u(b_j), \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (35)$$

즉, u_I 는 절점에서 u 와 동일한 값을 가지며 요소내부의 형상함수로서 표현될 수 있다. 함수 u_I 가 도입되는 이유는 u_I 로 u 를 보간할 때 발생하는 오차가 u_h 로 u 를 근사화 할 때 발생하는 오차를 유계시키기 때문이다. 즉, 어떤 양의 상수 C 에 대하여 다음식이 성립⁽⁸⁾한다.

$$\|u - u_h\| \leq C \|u - u_I\| \quad (36)$$

식 (35)의 $\text{norm} \|\cdot\|$ 는 V 에서 $a(\cdot, \cdot)$ 에 의해 유도되는 norm이며 대부분의 문제에서 그것은 $H^1(\Omega)$ 에서의 norm과 같다. 이러한 결과는 유한요소법의 수렴율 측정 및 절점최적화 문제에 사용된다.

2-1-4 보간 오차 이론 (Interpolation Error Theorem)

차수가 $k \geq 1$ 인 유한요소해의 공간을 고려해 보자.

$u \in H^{k+1}(\Omega)$ 라 가정하고 요소 K 의 직경을 h_K 라 하면 K 에 독립하는 어

면 양의 상수 C에 대해서 다음식이 성립한다.

$$\|u - u_I\|_{m,K} \leq ch_K^{k+1-m} |u|_{k+1,K}, \quad 0 \leq m \leq k \quad (37)$$

즉, 보간오차와 유한요소오차는 요소의 크기와 관계가 있음을 알 수 있다.

이제 다음과 같이 정의되는 함수 $B(u, \bar{h})$ 를 고려하자.

$$B = \left\{ \sum_{K=1}^M h_K^\beta |u|_{k+1,K}^2 \right\}^{1/2} \quad (38)$$

여기에서, $\bar{h} = (h_1, h_2, \dots, h_M)$, β 는 매개변수이다.

대부분의 문제에서 식 (34) 의 norm 은 $H^1(\Omega)$ 에서의 norm 과 동일하므로 식 (37) 과 B의 정의를 이용하면 다음식이 성립^{(8),(9)} 한다.

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq CB(u, \bar{h}), \quad \beta = 2k \quad (39)$$

2차원인 경우에는 요소의 면적 A_K 를 이용하면 된다.

K 와 무관한 상수 σ 를 도입하면,

$$h_K^2 \leq \sigma A_K, \quad K = 1, 2, \dots, M$$

식 (37) 을 이용하면 다음과 같다.

$$\|u - u_I\|_{m,K} \leq \sigma CA_K^{\frac{1}{2}(k+1-m)} |u|_{k+1,K} \quad (40)$$

이고

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq \sigma CB(u, \bar{A}), \quad \beta = k \quad (41)$$

여기에서, $\bar{A} = (A_1, A_2, \dots, A_M)$.

2-1-5 격자 최적화 (Grid Optimization)

함수 B 는 격자 최적화를 위한 기준이 되며, 1차원의 경우 B 는 요소의 길이의 함수로서 표현되어지며, 2차원의 경우엔 면적의 함수로서 표현된다. 매개변수 β 의 값은 경우에 따라 다르다.

(1) 1차원의 격자

다음에 대하여 요소길이의 벡터 \bar{h} 를 구한다.

$$\text{Minimize } B^2(u, \bar{h}) = \sum_{K=1}^M h_K^\beta |u|_{k+1, K}^2 \quad (42a)$$

$$\text{제약조건 } \sum_{K=1}^M h_K = 1 \quad (42b)$$

$$h_K \geq 0 \quad (42c)$$

여기에서, $\beta = 2k$ 이고 영역은 normalization 한다.

(2) 2차원의 격자

고정된 경계의 영역 Ω 에서 요소의 면적벡터 A 를 구한다.

$$\text{Minimize } B^2(u, \bar{A}) = \sum_{K=1}^M A_K^\beta |u|_{k+1, K}^2 \quad (43a)$$

$$\text{제약조건 } \sum_{K=1}^M A_K = 1 \quad (43b)$$

$$A_K \geq 0 \quad (43c)$$

식 (42)의 근사해를 얻기 위한 일련의 방법이 BABUSKA에 의해 제시된 방법을 사용함으로써 이용될 수 있다.

이 방법은 영역내의 절점의 위치를 정의하는 등급함수 $p(t)$ 의 이용을 근거로 한 것이다. 함수 $p(t)$ 는 $p(t) : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ 에서 연속적인 1계 미분을 갖고 $(0, 1)$ 에서 정확히 증가하는 함수이다. 절점의 집합 $\{0 = x_0 < x_1 < \dots < x_M = 1\}$ 를 영역의 등급별 분할이라 하며 다음과 같은 조건을 만족하여야 한다.

$$p(x_k) = k/M, \quad k = 0, 1, 2, \dots, M \quad (44)$$

여기에서, $p(0) = 0, p(1) = 1$

독립변수 $p(t)$ 를 Functional로 이용함으로써 식 (40)의 목적함수 $B^2(u, \bar{h})$ 를 표현할 수 있다.

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} p'(t) dt = 1/M = p'(x_{k-1/2}) h_k [1 + o(h_k)] \quad (45)$$

여기에서, $x_{k-1/2} = \frac{1}{2} (x_{k-1} + x_k)$

식 (42a)에서 모든 요소에 대한 합은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$B^2 = \frac{1}{M^\beta} \int_0^1 \frac{g(t)}{[p'(t)]^\beta} dt [1 + o(h)] \quad (46)$$

여기에서, $g(t)$ 는 seminorm $|u|_{k+1, \Omega}$ 의 적분을 표현하기 위해 사용된 것이다.

함수 B^2 를 최소화하는 함수 $p(t)$ 를 얻기 위해 변분법을 사용하면 최적의 등급함수는 다음을 만족시킨다.

$$p'(t) = \frac{g(t)^{1/(B+1)}}{\int_0^1 g(t)^{1/(B+1)} dt} \quad (47)$$

식 (45)와 (47)를 이용하면 p 의 최적조건은 다음과 같다.

$$f_K = h_K^\beta |u|_{k+1,K}^2 = \lambda, \quad K = 1, 2, \dots, M \quad (48)$$

여기에서, λ 는 k 와 무관한 상수이며 $\beta = 2k$ 이다.

만일 h^* 가 최적의 조건을 나타내고 \bar{h} 가 식 (48)로 부터 얻어진 결과라면 함수 B^2 는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$B^2(u, \bar{h}) = B^2(u, h^*) [1 + o(h)] \quad (49)$$

여기에서, $\bar{h} = \max_K (h_K)$

이러한 확장은 부분적으로 식 (42)와 식 (43)의 최적조건이 유사한 형태를 가짐을 보여준다.

요소 K 의 R^n 크기를 나타내기 위하여 기호 m_K 를 (R^1 에서는 길이, R^2 에서는 면적) 사용하면 식 (42)와 식 (43)의 최적성을 만족하는 필요 조건은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$g_{KN} m_K^\beta + \beta m_K^{\beta-1} |u|_{k+1,K}^2 = g_{KN} m_N^\beta + \beta m_N^{\beta-1} |u|_{k+1,N}^2 \quad (50)$$

여기에서 모든 요소 K 는 이웃하는 요소 N 와 다음과 같은 관계가 있다.

$$K \cap N \neq \emptyset \quad (51)$$

여기에서 g_{KN} 은 K 와 N 에 의해 공유되는 절점이나 변상에서의 $g(t)$ 의 평균값이다.

식 (51)이 R^1 과 R^2 에서 최적성을 나타낸다고 할 때, 1 차원에 대한 식 (48)을 식 (50)을 경유하여 2 차원 R^2 문제를 단순화 시킬 수 있다.

식 (48)과 식 (50)은 정해 (Exact Solution) u 의 존재때문에 실제계산을 하기 위해서는 불충분함으로 $|u|_{k+1,K}$ 의 적절한 대응값을 찾아야만 한다. 만일 정해 u 가 기저의 함수 \hat{u} 에 의해서 $|u|_{k+1,K}$ 의 형태로 대치된다고 하면 $|u - \hat{u}|_{k+1,\Omega} / |u|_{k+1,\Omega}$ 는 매우 작다. 따라서 \hat{u} 를 사용한 최종형태는 다음과 같다.

$$(1-D): h_k^2 |u|_{k+1,K}^2 = \hat{\lambda}, \quad \beta = 2k \quad (52)$$

$$(2-D): A_k^2 |u|_{k+1,K}^2 = \hat{\lambda}, \quad \beta = k \quad (53)$$

2-2 적응 해석법

최적 격자 설계 (Optimal Grid Design)의 근본이 되는 적응해석법은 다음식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{array}{ll} \text{Minimise} & \text{Maximum } E_e \\ \text{by grid design} & e = 1, \dots, NE \end{array} \quad (54)$$

여기에서, E_e 는 e 번째 유한요소의 오차의 크기이고 NE 는 유한요소의 총수이다.

식 (54)에 의하여 적응해석이 실행되어지면 최적조건을 만족하도록 최초

의 격자가 다시 구성되어 진다.

$$Ee = \text{Constant for } e = 1, \dots, NE \quad (55)$$

식 (55)는 적응격자에 만족된 근사해가 얻어질 때까지 이러한 해석 과정은 반복된다. 일반적으로 적응해석법은 다음과 같이 분류된다.

(1) r 법

가장 오래된 방법으로 격자점을 최적상태의 위치로 재배치시켜 근사치의 오차가 큰 요소를 다른 요소에 비하여 작은 크기의 요소로 만드는 방법으로 요소의 자유도 수를 증가시키지 않는다.

(2) h 법

상대적으로 오차가 큰 요소를 요소의 기하학적 중심에서 각 대각선의 중점을 연결, 요소를 몇개의 요소로 세분화 시킴으로서 오차를 줄이는 방법이다. 이때 전체적인 자유도의 수와 요소의 수가 증가하게 되며 정해진 오차의 범위에 도달할 때까지 상기의 과정이 반복된다.

(3) p 법

오차의 크기가 큰 요소에 고차 다항식이 어떤 함수를 보간시키는데 사용되는 점을 근거로 한 것으로, 즉 유한요소해의 오차가 상대적으로 큰 요소의 형상함수의 차수를 증가시키는 방법이다.

만일 어떤 요소의 오차가 작다면 형상함수에서 낮은 차수의 다항식을 사용해도 충분하다. 그러므로 h법이 전체 요소에서 한가지의 형상함수를 선택하는 반면 p법에서는 유한요소의 해석에 있어 여러형태의 형상함수를 사용한다. 즉 격자 자체를 수정하는게 아니라 다항식의 차수를 적용하는 것이다. 이 방법은 전체요소의 수는 변하지 않고 전체 자유도 수가 증

가한다.

2-3 rp법

2-2장에서 언급된 방법들로 유한요소해의 정도를 향상시킬 수는 있지만 개개의 방법에도 각각 특징이 있다.

r법은 어느 정도까지는 유한요소의 오차를 줄일 수 있지만 한요소 오차가 어느 정도 줄면 다른 요소의 오차가 늘어나기 때문에 반복 실행횟수를 적절한 정도까지만 해야하고 해의 정도도 어느 정도 이상 높일 수 없다. 반면에 p법과 h법은 해의 정도를 무한히 높일 수 있는데 일반적으로 p법이 h법보다는 정도가 높으며 p법과 h법을 혼합한 hp법이 가장 이상적인 적응 해석 방법임이 BABUSKA와 DORR에 의하여 입증되었다. 본 연구에서는 hp법의 무한히 증가하는 자유도 수를 어느 정도 억제하고 요소의 수를 증가시키지 않는 r법과 p법을 혼합한 rp법이 r법이나 p법보다 얼마나 정도를 높일 수 있는가를 살펴보고자 하였다.

제 3 장 해 석 예

본 연구의 rp법을 적용시키기 위하여 선정된 L형 모델을 Fig.1 에 도시하였다. Fig.1의 경계는 온도가 0 °C로 고정되어 있으며 단위면적 당 발열량은 일정하고 열전달 계수는 $k_x = k_y = 1$ 로 가정하였다. Fig. 2는 L형모델을 정사각형 형태로 유한요소화시킨 것이다.

3-1 지배방정식

본 연구의 rp법을 적용하기 위한 열전달 문제의 지배 방정식을 다음과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial x} (k_x \frac{\partial T}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (k_y \frac{\partial T}{\partial y}) + \tilde{Q} = 0 \quad (56)$$

식 (56)의 경계조건은 다음과 같다.

$$\text{경계 } S_1 \text{ 에서 } T = T(x, y)$$

$$\text{경계 } S_2 \text{ 에서 } k_x \frac{\partial T}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial T}{\partial y} n_y + q + h(T - T_\infty) = 0 \quad (57)$$

3-2 유한요소법의 정식화

주어진 미분 방정식의 해를 구하기 위해 식 (56)에 Galerkin 방법을 적용하여 전개하면 다음과 같다.

$$\iint N_i \left[\frac{\partial}{\partial x} (k_x \frac{\partial T}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (k_y \frac{\partial T}{\partial y}) + \tilde{Q} \right] dx dy = 0 \quad (58)$$

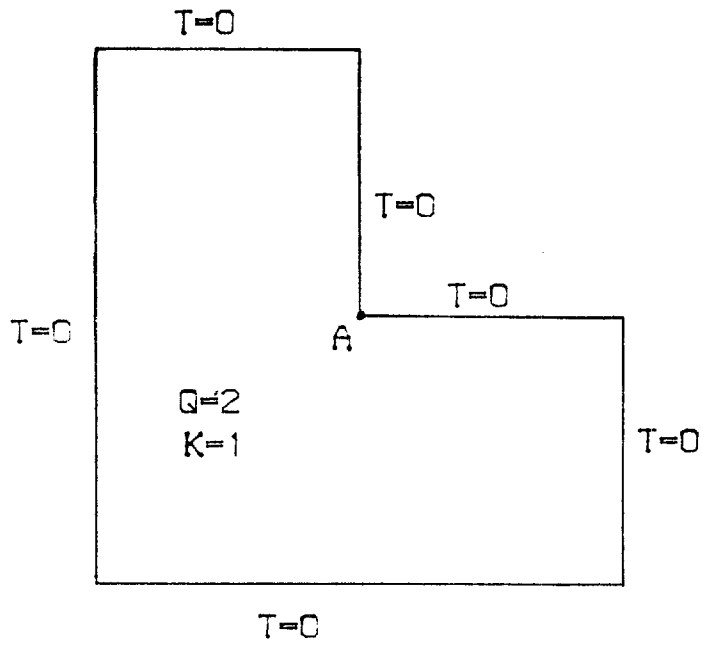


Fig. 1 . L-shaped domain.

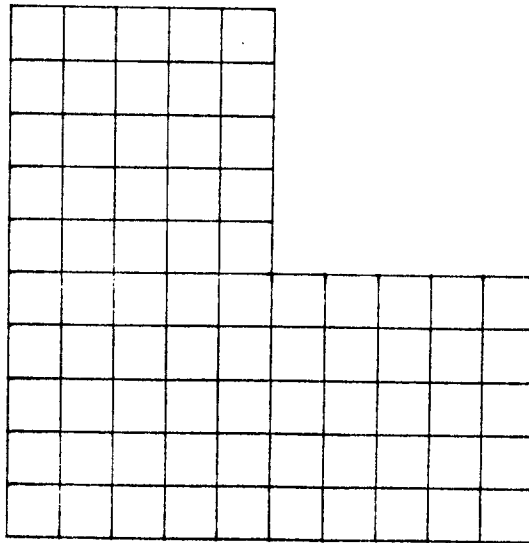


Fig. 2. Discretized Domain.

식 (58) 을 부분적분하고 형상함수를 이용하여 $T = [N][T]$ 를 대입하고 경계 조건을 적용하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \iint (k_x \left[\frac{\partial N}{\partial x} \right] [T] \frac{\partial N_i}{\partial y} + k_y \left[\frac{\partial N}{\partial y} \right] [T] \frac{\partial N_i}{\partial x}) dx dy \\ & - \iint N_i \tilde{Q} dx dy + \int_{S_2} (q N_i + h [N] [\bar{T}] N_i - h T_\infty N_i) d\Sigma = 0 \end{aligned} \quad (59)$$

식 (59) 를 행렬식으로 표시하면 다음과 같다.

$$\{K_c\} \{T\} = \{Q\} - \{q\} - \{K_h\} \{T\} + \{q T_\infty\} \quad (60)$$

여기에서,

$$\begin{aligned} K_{c_{ij}} &= \iint (k_x \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + k_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y}) dx dy \\ Q_i &= \iint \tilde{Q} N_i dx dy \\ q_i &= \int_{S_2} q N_i d\Sigma \\ K_{h_{ij}} &= \int_{S_2} h N_i N_j d\Sigma \end{aligned} \quad (61)$$

$$q_{T_\infty i} = \int_{S_2} h T_\infty N_i d\Sigma$$

본 연구에서는 식을 단순화시키기 위하여 단위 면적당 2 의 열량이 발생 하는 것으로 하고 열전도 계수 k_x 와 k_y 가 같다고 가정하였으므로 식 (61) 은 다음과 같이 단순한 형태를 갖는다.

$$\{K_c\}\{T\} = \{Q\} \quad (62)$$

3-3 오차의 크기

유한요소의 오차와 보간오차 (Interpolation Error)는 Sobolev 공간 $H^m(\Omega)$ 와 관계가 있는 norm과 seminorm을 이용해서 측정할 수 있다. norm의 형태는 여러가지 있지만 아래와 같은 norm은 제곱한 뒤 적분이 가능하므로 값을 얻기가 매우 편리하다.

2차원의 경우 norm의 형태는 다음과 같다. (7)

$$\|v\|_{m,\Omega} = \left(\int_{\Omega} \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 \leq m} \left[\frac{\partial^{(\alpha_1 + \alpha_2)} v}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}} \right]^2 dx \right)^{1/2} \quad (63)$$

또한 seminorm의 형태는 다음과 같다.

$$\|v\|_{m,\Omega} = \left(\int_{\Omega} \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 = m} \left[\frac{\partial^{(\alpha_1 + \alpha_2)} v}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}} \right]^2 dx \right)^{1/2} \quad (64)$$

여기에서, α_1 과 α_2 는 음이 아닌 정수이다.

3-4 적응 해석법

새로운 절점을 구하기 위한 r법은 다음의 조건을 만족시켜야 한다. (6)

$$f_K = h_K |u|_{k+1,K}^2 = \text{const.} \quad (65)$$

절점의 위치는 절점근처의 요소의 f_K 이 값에 의하여 결정된다.

만일 f_K 의 크기가 평균치보다 크면 요소 K주위로 절점이 이동하여 h_K 의 크기가 감소한다. 절점은 항상 두개의 요소에 의하여 공유되어

있기 때문에 절점의 이동폭은 상대적인 f_k 값에 의존한다. ν 번째 반복 후, 변한 새로운 절점의 위치는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$x_n^{\nu+1} = \frac{\sum_{K \in \{N\}} x_k^\nu (F_K/A_K)^\nu}{\sum_{K \in \{N\}} (F_K/A_K)^\nu} \quad (66)$$

여기에서, ν 는 반복횟수이고,

$x_n^{\nu+1}$ 는 n 번째 절점의 새로운 위치이며,

$\{N\}$ 는 X 을 포함하는 요소들의 집합이다.

그리고 \bar{x}_k^ν 는 ν 번째 반복된 경우, 요소 K 의 기하학적 중심이다.

$$F_K = A_K^\beta |u|_{k+1, K}^2, \quad \beta = k$$

또한 p 법은 각 요소의 오차를 계산한 후, 가장 오차가 큰 요소 K 를 검색하여 요소 K 의 절점의 수를 증가시켜 가는 것으로 오차가 임의의 허용범위에 들거나 어느 한 요소의 절점의 수가 12 이상이 될 때까지 반복한다.

3-5 실험 예

격자점을 최적의 상태로 재배시키기는 r 법, 상대적으로 오차가 큰 요소를 기하학적 중심에서 각 대각선의 중점을 연결시켜 한 요소를 몇개의 요소로 세분화시키는 h 법, 그리고 유한요소해의 오차가 상대적으로 큰 요소의 형상함수의 차수를 증가시키는 p 법 중, 본 연구에서는 어느 정도 밖에 오차를 줄일 수 있는 r 법의 단점을 보완하고 무한히 오차를 줄일 수 있는 p 법을 서로 조합한 rp 법을 채택하였다. Fig.3은 rp 법의

전체적인 구성을 나타내는 흐름도로서 경계온도는 0℃이고 내부 열원이 2로 균일하게 작용하였으며 요소의 길이는 1로서 한 요소당 4개의 절점수를 갖도록 하여 r법을 실행시킨 후 오차가 허용범위내에 수렴하게 되면 p법을 실행하도록 하였다. p법에서는 오차가 상대적으로 큰 요소의 절점의 수를 4개에서 8개로, 또 절점의 수가 8개로 증가한 요소에서는 12개로 증가시키면서 실행하였다. 본 연구에서는 편의상 1회 반복시 오차가 가장 큰 요소의 차수를 증가시키는 방법을 채택하였다.

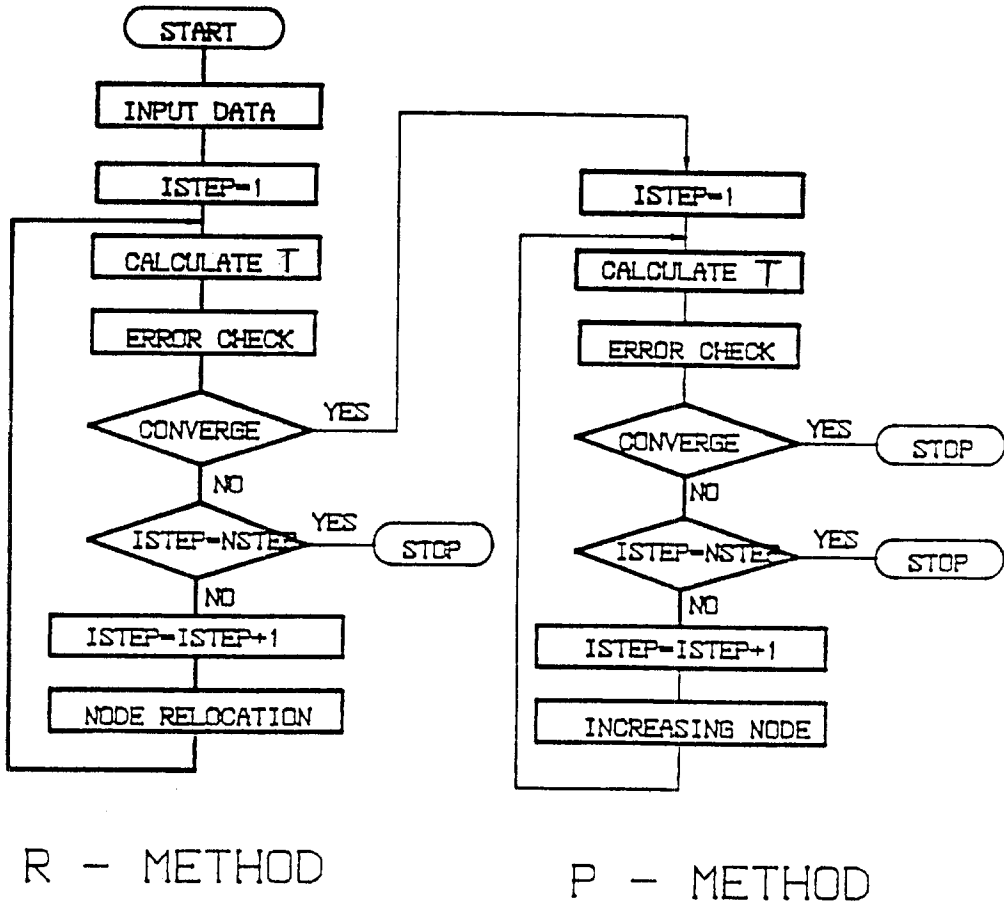


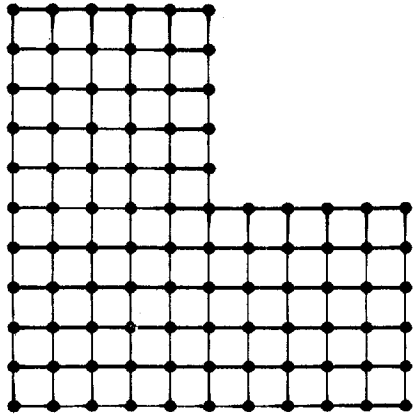
Fig. 3. Flow chart for r-p method

제 4 장 결과 및 고찰

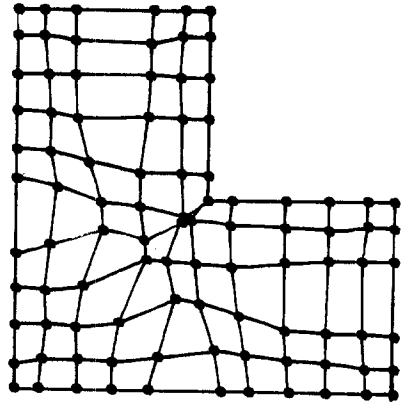
동일한 문제해석에 r법, p법, rp법을 실행시켰을 때 L형 영역내의 절점 변화상태를 Fig.4에 도시하였다. Fig.4-a는 r법에 의하여 이루어진 절점의 변화를 나타낸 것으로 절점의 위치가 이동하여 오차가 큰 요소의 면적이 감소했음을 알 수 있다. Fig.4-b는 p법에 의해 절점의 수가 증가한 것으로 오차가 많은 요소에 절점의 수가 4개에서 8개, 또 8개에서 12개로 증가함으로서 오차가 감소함을 알 수 있다. Fig.4-c는 rp법을 나타낸 것으로 r법에 의해 절점의 최적인 위치를 얻은 후에 p법에 의해 상대적으로 오차가 큰 요소를 찾아 순차적으로 절점의 수를 증가시킨 것으로 역시 오차가 큰 요소에 새로운 절점이 생김으로서 오차가 감소함을 알 수 있다.

Fig.5는 온도분포를 등온선으로 도시한 것이다. Fig.5-a는 일반적인 유한요소법에 의해 온도분포를 도시한 것이고, Fig.5-b는 rp법을 사용하였을 때의 온도분포를 나타낸 것으로 가운데 부분의 온도가 주위보다 훨씬 높음을 알 수 있었고 최적한 절점 위치에서 뿐만 아니라 온도기울기가 큰 부분에서의 온도분포를 보다 세밀히 파악할 수 있었다. Fig.6은 각 방법의 수렴율을 도시한 것이다.

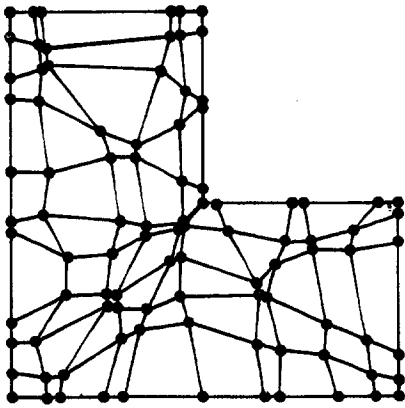
Fig.6-a은 r법의, Fig.6-b는 p법의, 그리고 Fig.6-c는 rp법의 수렴율을 나타낸 것으로 r법이나 p법에서보다 rp법에서 보다 효과적으로 오차가 감소함을 알 수 있었다.



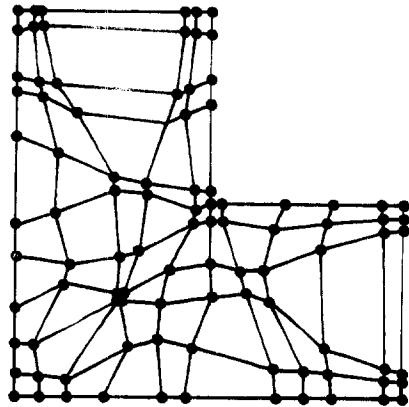
(a)



(b)



(c)



(d)

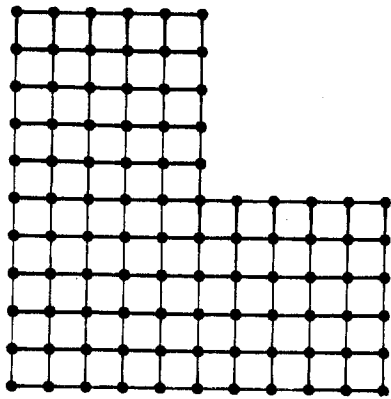
Fig. 4-a. Location of nodes by r method.

(a) Initial Model

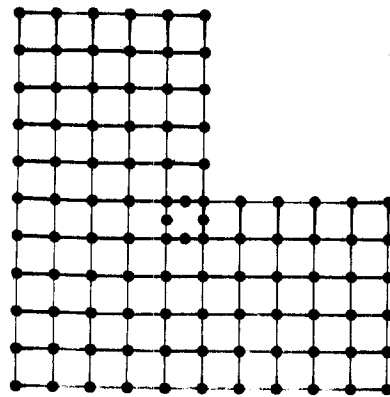
(b) after 5 iterations

(c) after 7 iterations

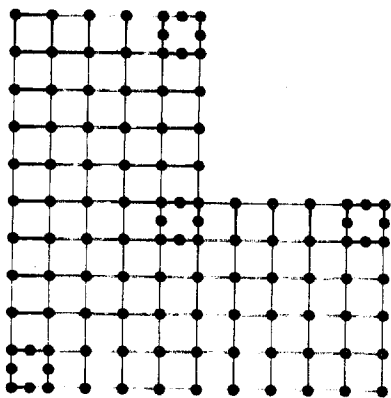
(d) after 10 iterations



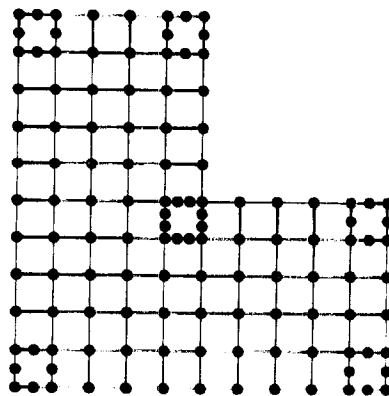
(a)



(b)



(c)



(d)

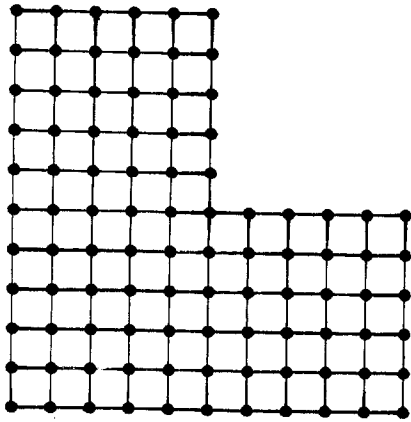
Fig. 4-b. Location of nodes by p method.

(a) Initial Model

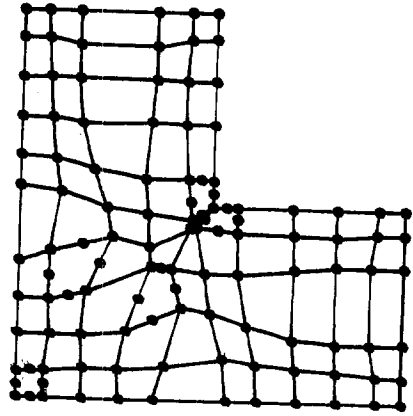
(b) after 1 iteration

(c) after 4 iterations

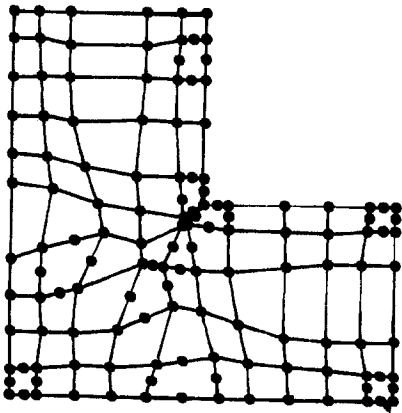
(d) after 7 iterations



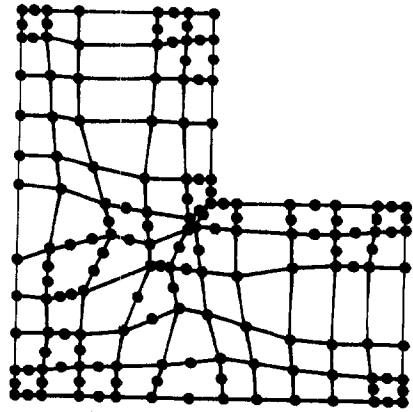
(a)



(b)



(c)



(d)

Fig. 4-C. Location of nodes by rp method

(a) Initial Model

(b) after 6 iterations

(c) after 11 iterations

(d) after 19 iterations

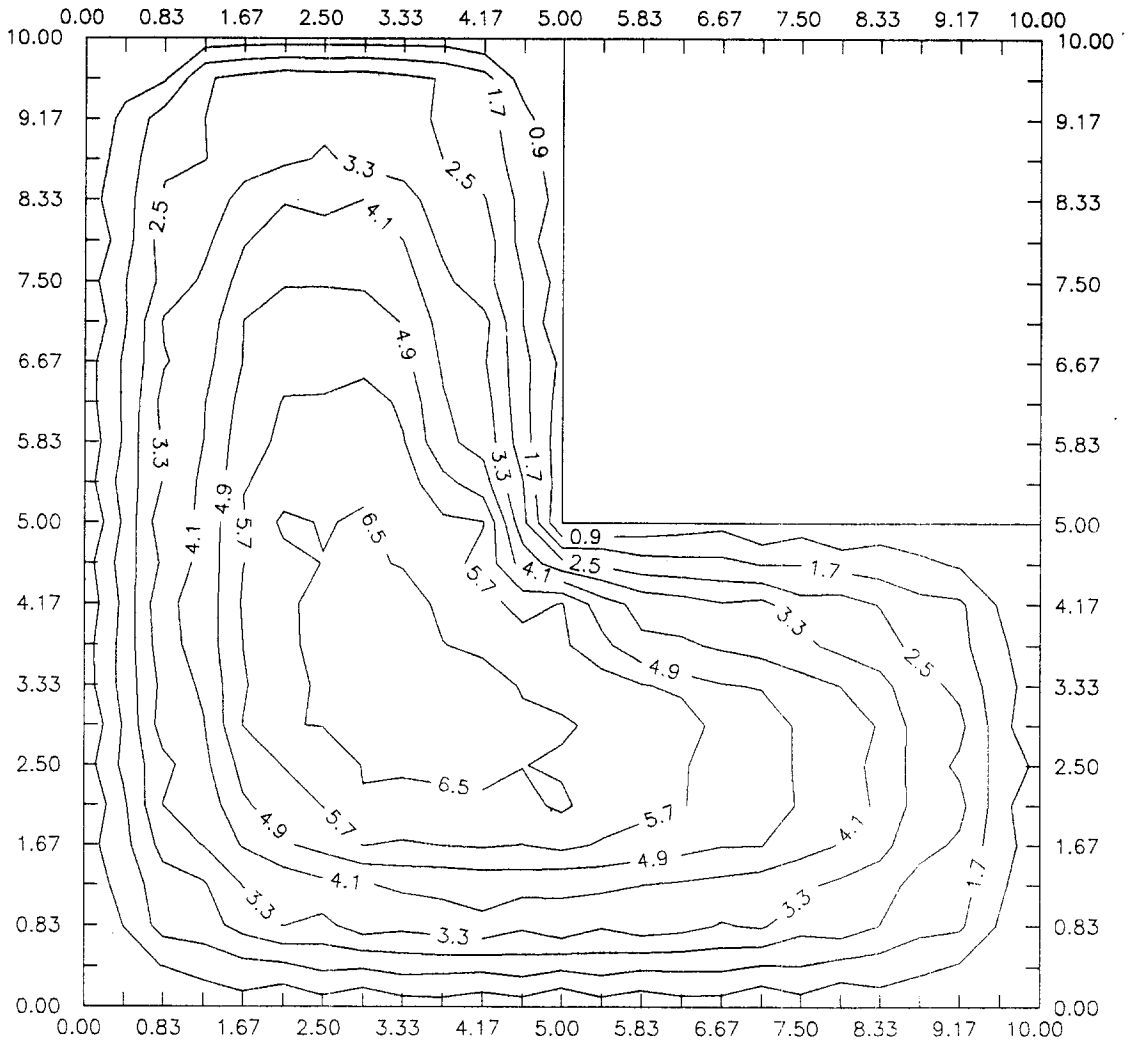


Fig. 5-a. Temperature Distribution by using
Finite Element Method.

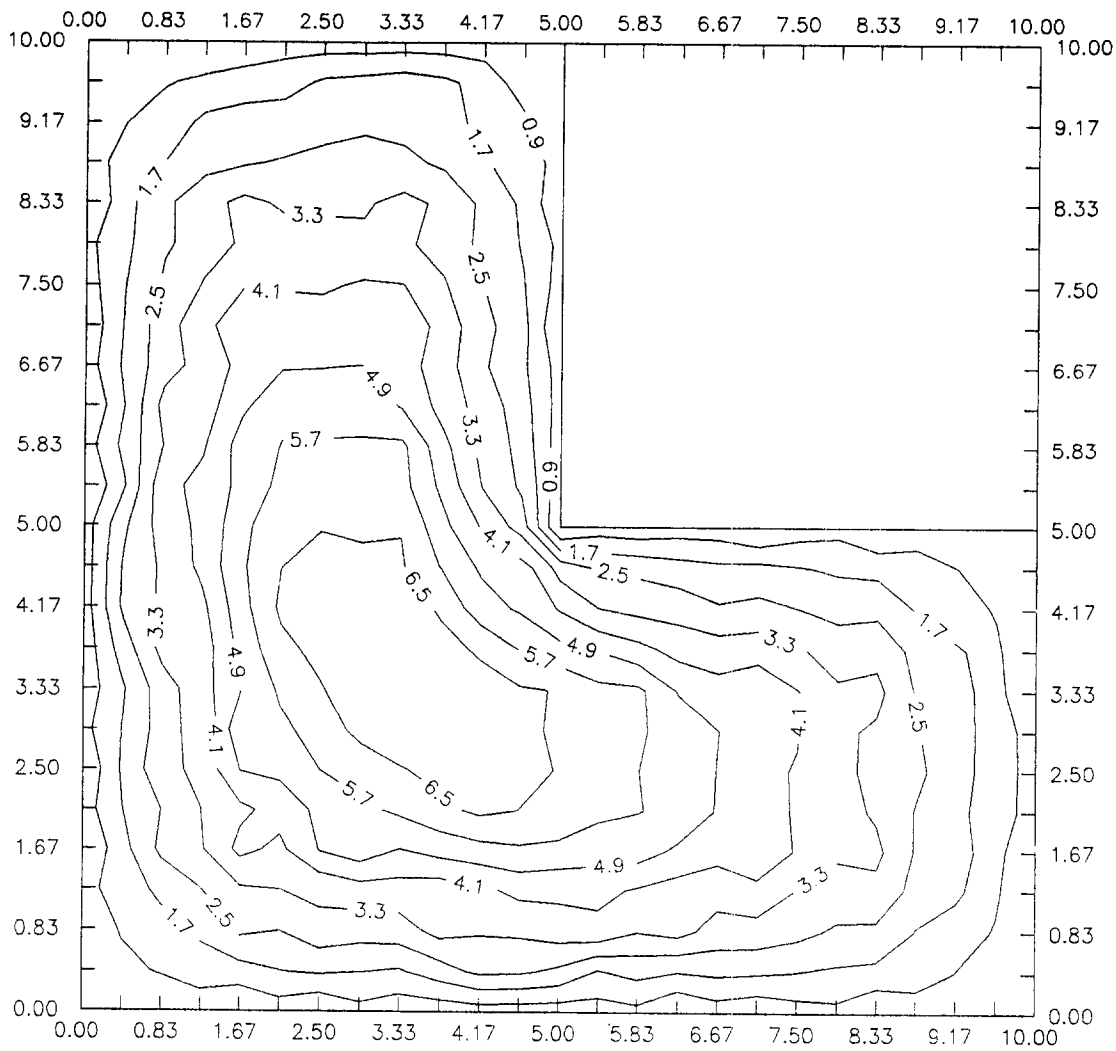


Fig. 5-b. Temperature Distribution by using
rp method.

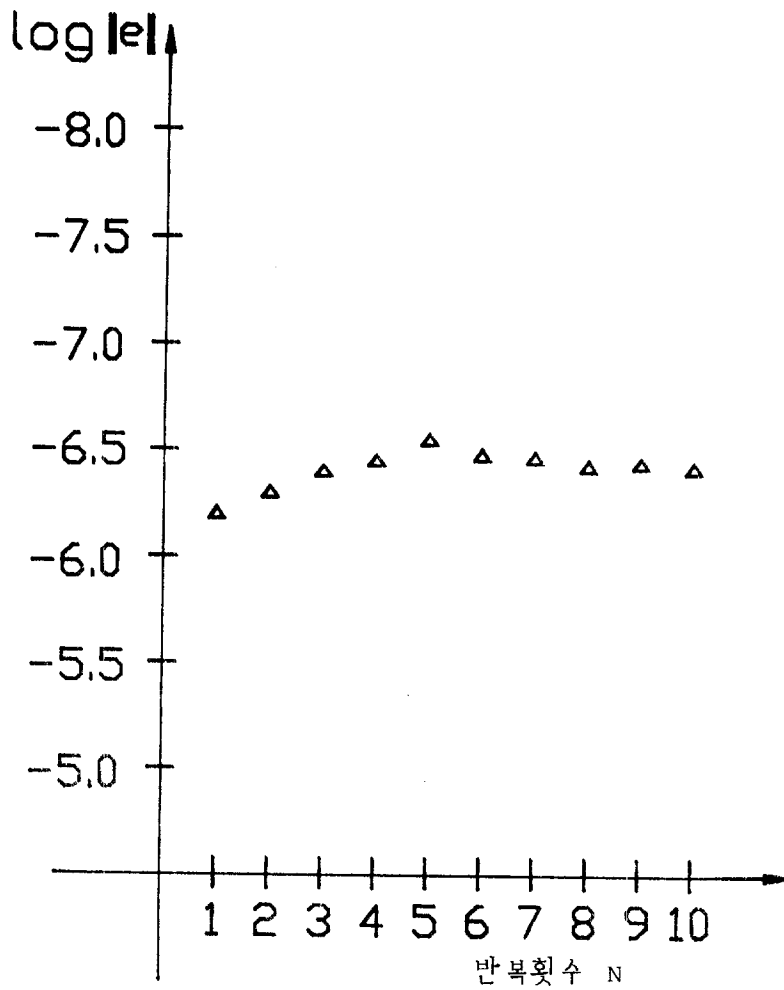


Fig. 6-a. Convergence rate of r method.

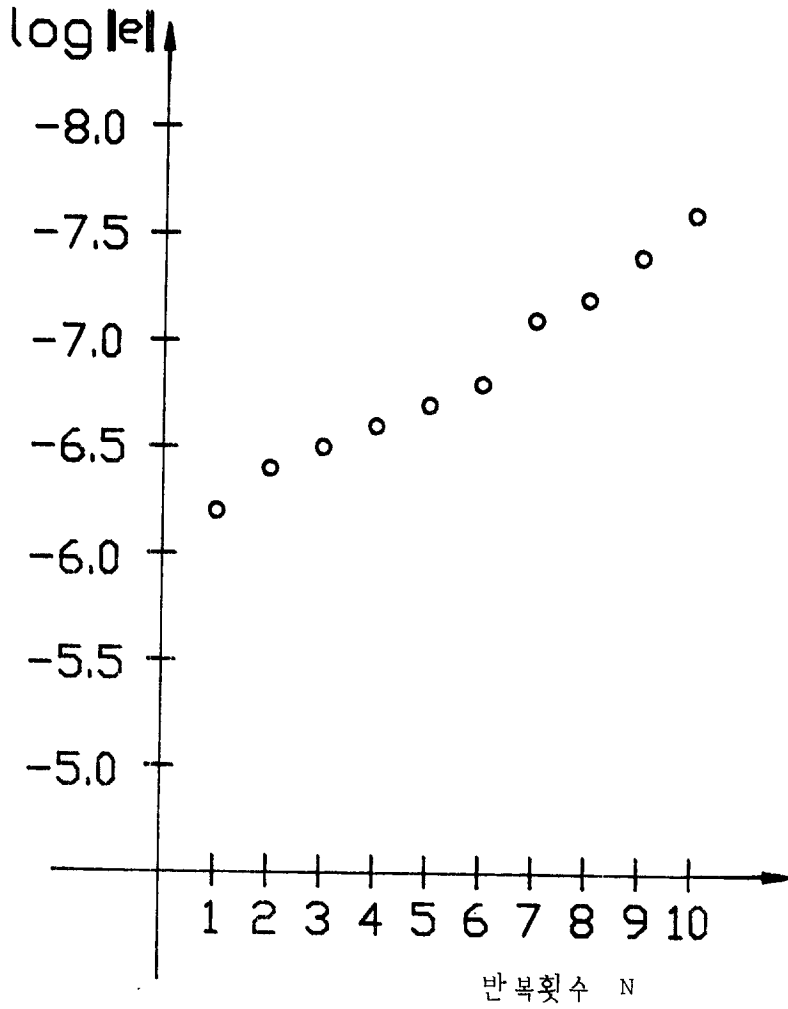


Fig. 6-b. Convergence rate of p method.

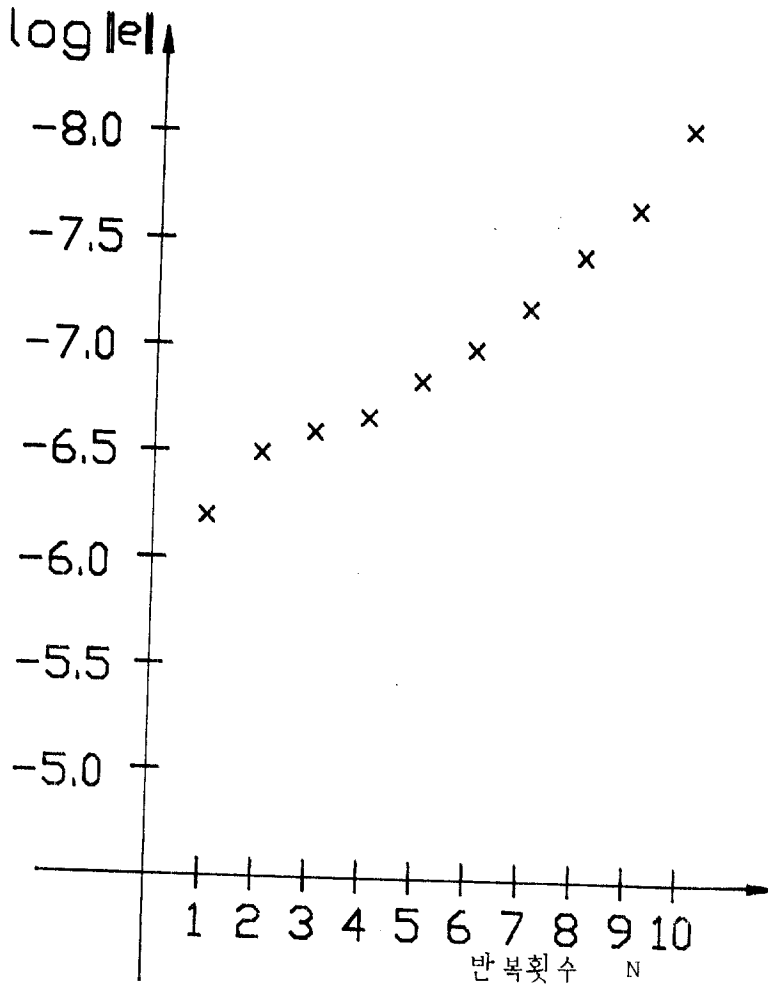


Fig. 6-c. Convergence rate of rp method.

제 5 장 결 론

본 연구는 L형 영역의 열전달 문제를 유한요소법의 후오차해석법인 r 법, p 법, rp 법에 적용시킴으로서 격자의 최적화와 후오차해석을 제시하였고 이를 프로그램화하였으며 다음과 같은 결론을 얻었다.

1) 격자의 최적화를 평가하는 r 법을 사용함으로써 오차의 크기는 5 번의 반복실행 결과 $0.5756 * 10^{-6}$ 에서 $0.3044 * 10^{-6}$ 으로 감소하여 오차를 영역내에 균일하게 분포시켰으며 최적인 격자점을 찾을 수 있었다.

2) p 법을 사용함으로써 영역내의 경계 요소와 코너 부분이 커다란 오차를 나타냈으며 오차의 크기는 10 번의 반복 실행 결과 $0.5756 * 10^{-6}$ 에서 $0.2541 * 10^{-7}$ 으로 현저히 감소하였다.

3) rp 법을 사용함으로써 최적인 격자점을 알 수 있었고, 또한 오차가 큰 부분의 형상함수의 차수를 증가시켜 절점의 수를 증가시켜 계산함으로써 모든 요소의 오차를 균일하게 분포시켜서 보다 안정된 해를 얻을 수 있었다. 온도 분포 또한 r 법이나 p 법보다 세밀하게 파악할 수 있었다. 오차의 크기는 10 번 반복실행시킨 결과 $0.5756 * 10^{-6}$ 에서 $0.7426 * 10^{-8}$ 으로 현저히 감소하였다.

따라서 r 법이나 p 법만을 사용하는 것보다 rp 법을 사용하는 것이 유한요소해를 구할 때 보다 효율적이며 안정된 해를 얻을 수 있었다.

이런 결과를 기초로 하여 본 연구의 rp 법은 유한요소법을 이용하는 응력해석 문제나 그외의 다양한 공학해석에 효과적으로 적용될 것으로 사료된다.

REFERENCES

1. I. Babuska and W. C. Rheinboldt, "A posteriori error estimates for the finite element method", *Internat. J. Numer. Meths. Engrg.* 12(1978) 1597-1615.
2. Eric B. Becker, Graham F. Carey and J. Tinsley Oden, "Finite element, Vol. I-IV", Prentice-Hall, Inc. (1981)
3. Noboru Kikuchi, "Finite Element Method in Mechanics", Cambridge Univ. of press. (1986) 25-114.
4. Noboru Kikuchi, "Adaptive grid-design methods for finite element analysis", Univ. of Michigan (1985).
5. D. W. Kelly, J. P. de S. R. Gago, O. C. Zienkiewicz and I. Babuska, "A posteriori error analysis and adaptive processes in the finite element method: part I- error analysis", *Internat. J. Numbr. Meths. Engrg.* 19 (1983) 1593-1619.
6. J. P. de S. R. Gago, D. W. Kelly, O. C. Zienkiewicz and I. Babuska, "A posteriori error analysis and adaptive processes in the finite element method: part II- adaptive mesh refinement", *Internat. J. Numer. Meths. Engrg.* 19(1983) 1621-1656.

7. B. A. Szabo and D. A. Dunavant, "An adaptive procedure based on the p-version of the finite element method", Specialists, Conf. Univ. of Maryland (1980).
8. A. R. Diaz, Noboru Kikuchi and J. E. Taylor, "A method of grid optimization for finite element method", Computer methods in applied mechanics and engineering 41(1983) 29-45.
9. O. C. Zienkiewicz, D. W. Kelly, J. P. de S. R. Gago and I. Babuska. "Hierarchical finite element approaches error estimates and adaptive refinement", Proc. Third Conf. On Mathematics of Finite Elements and Applications, Brunel Univ., U. K. (1981).

감사의 글

2년간의 대학원 생활동안 본 연구를 위해 아낌없는 격려와 지도를 해주신 지도교수 유형선 교수님과 본 논문의 심사를 맡아주신 박철희 교수님, 김진걸 교수님께 깊은 감사를 드립니다. 또한 성실한 대학원 생활이 되도록 많은 조언을 해주신 이재원 교수님, 정재천 교수님께 감사를 드립니다. 그동안 컴퓨터 프로그램개발에 도움을 준 만도기계 조길준 학우와 금성사 연구실의 황선웅 학우에게도 감사를 드리며 논문정리에 많은 도움을 준 기계설계실 박우철 후배와 기계공학과 심기현 후배에게도 감사를 드립니다. 그리고 연구실에서 함께 동고동락했던 김동일 선배님, 황영상 학우와 배상길 후배에게도 고마움을 표합니다.

끝으로 오늘이 있기까지 지식에 대한 헌신적인 사랑으로 보살펴주신 어머니님, 두분의 누님과 매형들, 정신적 지주가 되어주신 용운사 주지스님 그리고 주위의 사랑하는 모든분께 충심으로 감사를 드리며 지금은 타계하신 선친의 영전에 불효자가 삼가 바칩니다.