Markov연쇄에 관한 연구 : 추이확률행렬을 중심으로

教育學碩士學位請求論文

Markov연쇄에 관한 연구
-추이확률행렬을 중심으로-

A Study on the Markov Chains.
-Focussed on Transition Probability Matrix-

1995年 8月

仁荷大學校 教育大學院

數學敎育專攻

朴 淳 姬

敎育學碩士學位請求論文

Markov연쇄에 관한 연구
-추이확률행렬을 중심으로-

A Study on the Markov Chains.
-Focussed on Transition Probability Matrix-

1995年 8月

指導敎授 具 滋 興

이 論文을 碩士學位 論文으로 提出함.

仁荷大學校 敎育大學院

數學敎育專攻

朴 淳 姬

本 論文을 朴淳姬의 碩士學位論文으로 認准함.

1995年 8月

主審 ____________________

副審 ____________________

副審 ____________________

요약문

이 연구에서는 Markov 연쇄에 관한 이론과 그 모형들에 관한 논의를 하는 데 그 목적이 있으며,그러기 위하여 Markov연쇄의 추이확률과 추이확률행렬에 관한 성질들을 심도있게 조사 연구하였다
그리고 또 확률걸음(random walk)들을 모형으로 하여 Markov연쇄의 상태(states)들과 상태공간(state space)의 성분(component)들을 분류한 보기로 제시하였다.

Abstract

The aims of this thesis is to discuss on the properties of transition probabilities and transition probability matrix of the Markov chain X(t).

Furthermore,we also suggest Random Walks models in order to discuss on the classification of states and components of the given Markov chains.

감사의 말씀

本 論文의 題目 選定에서부터 完成되기까지 親切하게 指導하여 주신 具滋興敎授님께 感謝를 드리오며, 아울러 論文 審査를 통하여 激勵와 助言을 해주신 敎授님께 깊은 感謝를 드립니다.

그 외에 많은 가르치심을 주신 數學科 敎授님들과, 공부할 수 있도록 도움을 주신 家族, 선생님 여러분께도 深甚한 謝意를 表합니다.

1995년 8월

朴 淳姬

목차

1. 서론

이 연구의 목적은 확률과정(stochastic processes)중에서도 가장 기본적인 과정인 Markov 과정(Markov process)에 관한 이론과 그 응용에 대한 이론적 고찰을 하는 데 있다.

특히, Markov과정 중에서도 이산매개변수공간(discrete parameter space)을 가지는 Markov연쇄(Markov chain)에 대하여 자세히 논의하고자 한다.

그러기 위하여서는 주어진 Markov연쇄의 추이확률(transition probability)과 추이확률행렬(transition stochastic matrix)의 정의들과 성질들을 조사연구함으로써 가능하다고 본다.

본 논문에서는 Markov연쇄에 관한 기초적 이론모형과 그 성질에 관하여 고찰하고자 한다.

2. Markov과정과 Markov성

2.1 확률과정

확률론은 우연현상(random phenomenon)이 지배하는 자연 현상 또는 실험의 과정에서 일어날 수 있는 결과(outcome)들을 연구 대상으로 하는 학문분야이다.

특히, 우연현상에서 시간의 경과에 따라 변동하는 현상을 규명하는 확률모형에 관한 이론이 확률과정(stochastic process)이다.

즉 시간을 나타내는 parameter t와 확률 parameter ω에 의한 확률과정을 $X(t,\omega)$로 나타내면, parameter t를 고정할때 이것은 하나의 확률변수(random variable)가 되며, 따라서 이 확률변수는 하나의 확률분포(probability distribution)를 가지게 된다.

그러므로 확률과정은 하나의 확률변수들의 계열(sequence)이라고 생각할 수 있다.

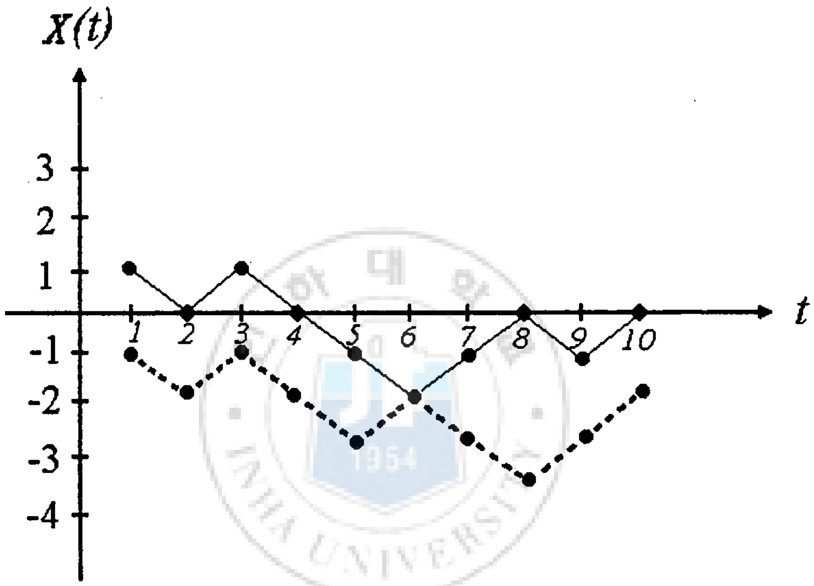
다음, 확률모수(stochastic parameter) ω를 고정할 때는 시간의 흐름에 따라 변동하는 하나의 함수(function) $X(t)$를 얻게 되는데 이것은 $X(t,\omega)$의 하나의 실현치의 곡선으로써 이곡선을 표본과정(sample path)이라고 한다.

예컨데, 동전(coin)을 무심코 던지는 시행을 반복해서 표면(head)이 나오면 1, 이면(tail)이 나오면 -1이 되도록 설계된 확률변수 Y를 가지고 꾸민 확률과정을

$$X_n = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n \tag{1}$$

이라 하자.

parameter t는 자연수 전체의 값을 취하는 집합을 이루며, 이집합을 T={ t | t=1,2,⋯}라 하고 T를 매개변수공간(parameter space)이라고 부른다.



이경우 parameter space T는 그 값으로 자연수에 대응하는 이산적점(discrete point)의 값들을 실수직선상에서 취한다. 그러므로 이 T를 **이산매개변수공간**(discrete parameter space)이라 하고, 위 확률과정 X_n(=X(n, ω))를 **무제한 취보**(unrestricted random walk)라 한다.

한편 parameter t=n에서 확률과정 $X(n, \omega) = x_n$를 주어진 확률과정의 상태(state)라 한다.

그리고 parameter t의 각각의 값들에 대응하는 상태들의 집합을 상태공간(state space)이라고 부르며, 이것을 간단히 S로 쓰기로 한다.

그리고 parameter 공간에서와 마찬가지로 각 상태(state)들이 이산적인 경우를 **이산적상태공간**(discrete state space)을 갖는다고 한다.

위에서 예시한 취보를 나타내주는 확률과정 X_n는 이산적인 parameter space와 이산적인 state space를 가지는 확률과정이라고 할 수 있다.

2.2 Markov과정과 Markov성

Markov과정은 시점 t에서 확률과정 X(t)의 상태는 그보다 이전의 시점 s(< t)인 t 직전의 상태에만 종속적인 확률과정이다.

즉 현재의 상태가 정확히 알려지면, 미래의 상태에 관한 확률법칙은 과거의 이력(history)에 무관하게 정해진다는 것을 의미한다.

이러한 성질을 **마르코프性**(Markov property)이라고 부른다.

이것을 정확히 정의하면 다음과 같다.

시점: $t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t$에 관하여

$$\Pr(X(t) \mid X(t_1) = x_1, X(t_2) = x_2, \cdots, X(t_n) = x_n)$$

$$= \Pr(X(t) < x \mid X(t_n) = x_n) \quad (2)$$

위식(2)를 만족하는 확률과정을 **Markov과정**(Markov process)이라고 한다.

또 이 Markov 과정 X(t)에서 특히 이산적인 시점: t=0,1,2, …만을 고려하면, 이 시점의 순서가 붙여진 확률변수열

$$X_n = X(n) \quad (n=0,1,2,\cdots) \tag{3}$$

을 얻게 된다.

다시 확률과정 X_n의 값,즉 상태공간 역시 이산적인 정수치의 집합:S={…-2,-1,0,1,2,…}을 취하게 된다.

이와같은 Markov 과정을 **Markov 연쇄**(Markov chain)라고 한다.

3. Markov연쇄의 추이확률의 정의와 성질

Markov 연쇄 $\{X_n\}$에 대하여

조건부 확률(conditional probability):

$$P_{ij}(m) = \Pr(X_{t+m} = j \mid X_t = i) \quad (m \ge 0,\ i, j \in S) \tag{4}$$

를 시점 t에서 상태 i에 있다가 m-보(m-steps)후인 시점 ($t+m$)에 상태 j로 옮겨가게될 확률로써 이 확률을 m-걸음 추이확률(m-steps transition probability)이라고 한다.

특히, m=1인 경우

$$P_{ij}(1) = \Pr(X_{t+1} = j \mid X_t = i) \tag{5}$$

를 t시점에서의 추이확률(transition probability)이라고 부르고, 또 간단히 P_{ij}로 쓴다.

한편 Markov연쇄 X_n의 상태공간 S가 유한집합(finite set)인 경우, **유한 Markov연쇄**(finite Markov chain)라고 한다.

주어진 유한 Markov연쇄의 모든 m-보추이확률 $P_{ij}(m)$들을 원소로 하는 $m \times m$ 정방행렬(square matrix)로 표현할 수 있다.

Markov 연쇄 X_t (t=1,2,$\cdots$, n)에 대해

$$\text{행렬 } (P_{ij}(m)) \qquad (i, j=1,2,\cdots, n) \tag{6}$$

를 X_t의 m-보추이확률행렬(m-steps transition probability matrix)이라고 한다.

특히, m=1인 경우

$$(P_{ij}(m))=(P_{ij}) \tag{7}$$

라 쓰고, 이 행렬을 간단히 X_n의 추이확률행렬(transition probability matrix)이라고 한다.

3.1 Chapman Kolmogorov 방정식

정리1 Markov 연쇄 X(t)의 m-보추이확률행렬을 $P_{ij}(m)$ 이라 할 때,주어진 양의 정수 $m, n \geq 0$에 대하여 다음 관계식이 성립한다.

$$P_{ij}(n+m) = \sum_{k=1}^{\infty} P_{ik}(n) \cdot P_{kj}(m) \tag{8}$$

(여기서 $i, j, k \in$ S)

증명 $P_{ij}(n+m)=\mathrm{P}\{X(n+m)=j \mid X(0)=i\}$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}\{X(n+m)=j,\ X(n)=k \mid X(0)=i\}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}\{X(n+m)=j \mid X(n)=k,\ X(0)=i\} \cdot \mathrm{P}\{X(n)=k \mid X(0)=i\}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P\{X(n+m)=j \mid X(n)=k\} \cdot P\{X(n)=k \mid X(0)=i\}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P_{ik}(n) \cdot P_{kj}(m)$$

3.2 Markov연쇄의 상태 분류

Markov연쇄 $X(t)$의 속성은 추이도식(transition diagram)의 구조에 의하여 설명할 수 있다.

정의1 만일 Markov연쇄 $X(t)$의 추이확률이 $P_{ij}>0$이면, 상태 i에서 상태 j로 옮겨갈 수 있다고 하고,

$$i \to j \ (i, j \in S)$$

로 쓴다.

또 만일 $P_{ij}=0$이면, 상태 i에서 j로 옮겨갈 수 없다고 하고,

$$i \not\to j \ (i, j \in S)$$

로 쓴다.

정의2 주어진 Markov 연쇄 $X(t)$에 대하여 m-보 추이률(m-steps transition probability)이 양수일 때, 즉

$$P_{ij}(m)>0, \quad m \geq 0$$

이면 상태 i에서 m-보후에 상태 j에 도달가능 (accessible)하다고 한다.

그리고, 또 추이도식으로

$$i \to j, \quad (i, j \in S)$$

와 같이 쓴다.

만일, $m=0$이면

$$P_{ij}(0) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

로 두기로 하자

정의3 주어진 Markov 연쇄 X(t)에 대하여 두 상태 $i, j \in S$가 서로 도달가능할 때, 상태 i와 j는 상호도달가능(communicate)하다고 하고,

$$i \leftrightarrow j \quad (i, j \in S)$$

와 같이 쓴다.

정리2 Markov연쇄 X(t)의 상태들 사이에 추이도식의 상호도달가능(communicate, $\leftrightarrow$)한 것은 동치율 (equivalence relation)을 만족한다.

즉 주어진 Markov연쇄 X(t)의 상태공간 S는 동치류(equivalence class)로 유별된다.

증명 우선 대칭율(symmetric law)이 성립하는 것은 상호도달가능(communicate)의 정의에 의하여 분명하다.

즉

$$i \leftrightarrow j \Rightarrow j \leftrightarrow i$$

이 성립한다.

다음 상태 i 와 j가 상호도달가능하면 $P_{ij}(m)>0$, $m \geqq 0$ 이다.

그러면 i는 자기자신과 서로 도달가능하다.

즉 $i \leftrightarrow i$이고, 이것은 반사율(reflexive law)이 만족되는 것이다.

끝으로 상태 $i, k, j (\in S)$들 사이에 추이율(transitive law)이 성립하게 됨을 보이자

만일 $i \leftrightarrow k$ 이고 $k \leftrightarrow j$ 이라고 하자.

그러면 적당한 정수(integers) m, n에 대하여

$m, n \geqq 0$ $P_{ik}(m) > 0$ 그리고 $P_{kj}(n) > 0$ 성립한다.

뿐만 아니라 Chapman-Kolmogorov방정식에 의하여

$$P_{ij}(m+n) = \sum_{r=0}^{\infty} P_{ir}(m) P_{rj}(n)$$

$$\geq P_{ik}(m) P_{kj}(n) > 0 \qquad r = k$$

그러므로 i는 j에 도달가능하다.

마찬가지로 적당한 s, t가 존재하여

$$P_{jk}(s)>0 \qquad P_{ki}(t)>0$$

그러므로

$$P_{ji}(s+t)=\sum_{r=0}^{\infty} P_{jr}(s)\, P_{ri}(t)$$

$$\geqq P_{jk}(s)\, P_{ki}(t)>0$$

따라서 j는 i에 도달가능하다

그런데 i와 j는 상호도달가능하므로 상태 i, k, j 사이에 추이율이 성립한다.

정의4 주어진 Markov 연쇄 X(t)의 상태공간을 S라 하고, 그것의 동치류를 $C_1, C_2, \cdots, C_k$라 하면

$$S=C_1\cup C_2\cup\cdots\cup C_k=\Sigma\, C_r$$

$$C_i\cap C_j=\emptyset \ (\, i\neq j)$$

이고,이때 $C_1, C_2, \cdots, C_k$를 Markov 연쇄 X(t)의 성분(component)이라고 부른다.

정의5 주어진 Markov 연쇄 X(t)의 성분 C에 대하여

$$i\in C\text{이고 } j\notin C$$

이고, 또 정수 $m>0$에 대하여

$$P_{ij}(m)=0$$

이 성립하면, C를 **폐쇄성분**(closed component) 또는 **Ergodic성분**이라고 한다.
또 Ergodic이 아닌 나머지 성분을 **순간성분**(transient component)이라고 부른다.

정의6 확률변수 T_{ii}를 상태 $i(\in S)$에서 출발해서 처음으로 i에 되돌아오게 되는 시간 또는 보수(numbers of steps)라 하자.
만일

$$\Pr(T_{ii}<\infty)=1$$

이 성립하면,상태 i $(\in S)$는 재귀상태(reccurrent state)라 하고,

$$\Pr(T_{ii}<\infty)<1$$

이 성립하면, 상태 i를 일시상태(transient state)라고 한다.

정의7 주어진 Markov 연쇄 $X(t)$의 성분 C에 속하는 상태 $i(i\in C)$에 대하여

$$M(i, i)=M(i)=\{m \mid P_{ii}(m)>0\}$$

라 하고 $M(i)$에 속하는 m의 최대공약수(g.c.d)를 $d(i)$라 할 때, $d(i)$를 상태 i의 주기(period)라 한다.

특히, d(i)=1일때 상태 i는 비주기적(aperiodic)이라 한다.

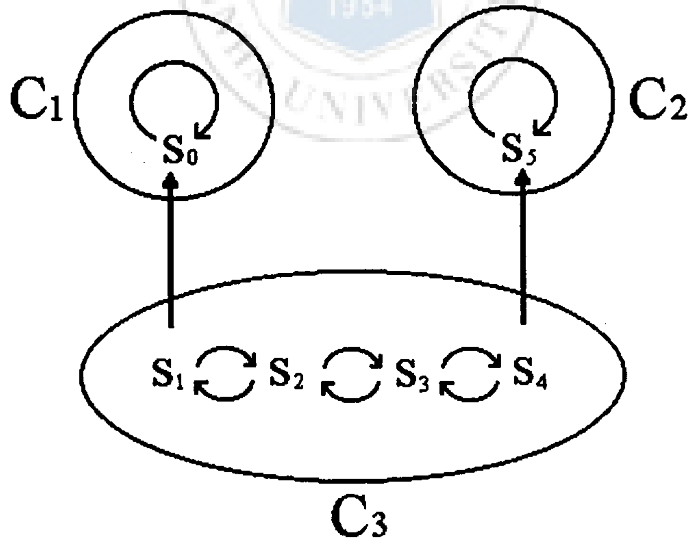
4. 실제모형연구

4.1 모형사례 1

2개의 흡수벽 취보 X(t)의 추이확률행렬을

$$
P= \begin{array}{c|cccccc}
 & S_0 & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 \\
\hline
S_0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
S_1 & q & 0 & p & 0 & 0 & 0 \\
S_2 & 0 & q & 0 & p & 0 & 0 \\
S_3 & 0 & 0 & q & 0 & p & 0 \\
S_4 & 0 & 0 & 0 & q & 0 & p \\
S_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}
$$

이라고 하면, 이 추이확률행렬의 추이도식은 다음과 같다.



이때, 이 취보의 상태공간은 3개의 성분 C_1, C_2, C_3로

분류된다.

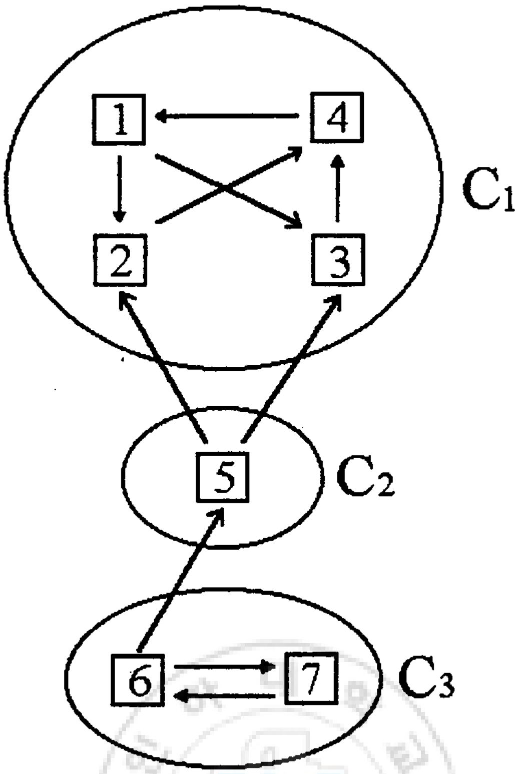
이때 C_1와 C_2는 폐쇄성분(closed component) 또는 엘가딕성분(Ergodic component)이고, C_3는 일시성분 또는 순간성분(transient component)이다.또 S_0와 S_5를 흡수벽(absorbing barrier) 또는 흡수상태(absorbing states)라고 한다.

4.2 모형사례 2

주어진 Markov 연쇄 X(t)의 추이확률행렬이

$$P=\begin{pmatrix} 0 & p & q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r & 0 & w \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

로 주어질 때, 상태공간 S={1,2,3,4,5,6,7}의 성분은 추이도식에 의하면 다음과 같다.



이때 성분 C_1={1,2,3,4}은 Ergodic성분이고, C_2={5}, C_3 ={6,7}는 일시성분이다.

상태 $\boxed{5}$는 비복귀적상태이다.

한편 성분 C_1의 상태들의 주기(period)는 모두 3 이다.

그리고 d(5)=∞이므로 상태 $\boxed{5}$는 비복귀적이다.

즉 동일한 성분C에 속하는 모든 상태들은 같은 주기를 갖는다.

참고문헌

1.Coleman,R(1974);Stochastic Process, London.George Allen and Unwin LTD,p.p 1-5

2.西田俊夫 著(1978);應用確率論,培風館,日本p.p61-62,100-103

3.구자홍저(1988);확률론. 대우학술총서·자연과학58 , 민음사 p.p266-274