교육학 석사학위청구논문

삼각함수의 Maclaurin 급수

Maclaurin Series of the Trigonometric Functions

2005년 8월

인하대학교 교육대학원

수학교육전공

김일철

교육학 석사학위청구논문

삼각함수의 Maclaurin 급수

Maclaurin Series of the Trigonometric Functions

2005년 8월

지도교수 정 상 태

이 논문을 석사학위 논문으로 제출함.

인하대학교 교육대학원

수학교육전공

김일철

본 논문을 김일철의 석사학위 논문으로 인준함.

2005년 8월

주심 ______________________

부심 ______________________

부심 ______________________

국 문 요 약

이 논문에서는 $\sin x$나 $\cos x$를 포함한 삼각함수와 이와 연관된 여러 가지 함수의 Maclaurin 급수에 대해서 알아보고자 한다.

이를 위해서 제 1장에서는 제 2종 Stirling number의 정의와 세 가지 동치 조건을 살펴보겠다. 제 2장에서는 연산자 $\left(x\frac{d}{dx}\right)^n$의 기본 확장 공식과 함수의 Stirling number를 이용한 무한급수 표현에 대해서 알아보고, 무한급수에서 어떻게 이용되는지 알아보고자 한다.

마지막으로, 제 3장과 4장에서는 기본 공식을 이용하여 삼각함수와 쌍곡함수의 Maclaurin 급수에 대해서 알아보도록 하겠다.

Contents

Ⅰ. Stirling number의 세 가지 동치조건

이 장에서는 제 2종 Stirling number의 정의와, 세 가지 동치조건에 대해서 살펴보겠다.

[정의 1.1] n개의 원소로 이루어진 집합을 k개의 부분집합($\neq\varnothing$)으로 분할하는 방법의 수를 제 2종 Stirling number라 하고, 이 수를 $S(n,k)$로 나타내면,

$$S(n,k)=\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}=\sum_{j=0}^{k}\frac{(-1)^{k-j}j^{n}}{j!\,(k-j)!} \text{ 이다.}$$

이후의 Stirling number는 모두 제 2종 Stirling number를 나타낸다.

[정의 1.2] 자연수 x, n, k 에 대하여

$$\sum_{n=0}^{\infty}S(n,k)\frac{x^n}{n!}=\frac{(e^x-1)^k}{k!} \text{ 로 정의된다.}$$

[정의 1.3] 자연수 x, n, k 에 대하여

$$x^n=\sum_{k=0}^{n}S(n,k)(x)_k \text{ 로 정의된다.}$$

(단, $(x)_k=x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)$, $(x)_0=1$)

[정의 1.4] 자연수 x, n, k 에 대하여

$$\sum_{n=0}^{\infty}S(n,k)x^n = \frac{x^k}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-kx)} \text{ 로 정의된다.}$$

먼저 정의 1.2가 어떻게 나왔는지 살펴보자.

정의 1.1 에서 $S(n,k) = \sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{k-j} j^n}{j!(k-j)!} = \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^{k-j} j^n}{j!(k-j)!} \frac{k!}{k!}$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{k-j} j^n$$

$k-j=i$ 로 치환하면

$$= \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^{i} \binom{k}{i} (k-i)^n = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{j} \binom{k}{j} (k-j)^n$$

이 된다. 따라서,

$$\sum_{n=0}^{\infty} S(n,k) \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{j} \binom{k}{j} (k-j)^n \frac{x^n}{n!}$$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{j} \binom{k}{j} \sum_{n=0}^{\infty} (k-j)^n \frac{x^n}{n!}$$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{j} \binom{k}{j} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{(k-j)x\}^n}{n!}$$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{j} \binom{k}{j} e^{(k-j)x}$$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{j} (e^x)^{k-j} = \frac{1}{k!} (e^x - 1)^k$$

이 되어 정의 1.2가 나온다.

다음으로, 정의 1.3이 어떻게 나왔는지 살펴보자.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(xt)^n}{n!} = e^{xt} = (e^t)^x = \{(e^t - 1) + 1\}^x$$

$$= \sum_{k=0}^{x} \binom{x}{k} (e^t - 1)^k 1^{x-k} = \sum_{k=0}^{x} \frac{(x)_k}{k!} (e^t - 1)^k$$

정의 1.2에 의해

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} (x)_k S(n,k) \frac{t^n}{n!}$$

이 된다. 따라서,

$x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)(x)_k$ 이 되어, 정의 1.3이 나온다.

마지막으로, 정의 1.4 를 살펴보자.

$$\sum_{n=0}^{\infty} S(n,k)x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}j^n x^n = \sum_{j=0}^{k}\frac{(-1)^{k-j}}{k!}\binom{k}{j}\sum_{n=0}^{\infty}j^n x^n$$

$$= \sum_{j=0}^{k}\frac{(-1)^{k-j}}{k!}\binom{k}{j}\frac{1}{1-jx}$$ 이 된다.

정의 1.4의 우변을

$$\frac{x^k}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-kx)} = A_0 + \frac{A_1}{1-x} + \cdots + \frac{A_k}{1-kx}$$
$$= \sum_{j=0}^{k} A_j \frac{1}{1-jx} \tag{1.1}$$

라 놓고

$$A_j = \frac{(-1)^{k-j}}{k!}\binom{k}{j}$$

가 됨을 보도록 하자.

0 과 k 사이에 있는 임의의 자연수 j 에 대하여 (식 1.1)의 양변에 $(1-jx)$를 곱하면

$$\frac{x^k}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-(j-1)x)(1-(j+1)x)\cdots(1-kx)}$$
$$= (1-jx)\left\{A_0 + \frac{A_1}{1-x} + \cdots + \frac{A_k}{1-(j-1)x}\right\} + A_j$$
$$+ (1-jx)\left\{\frac{A_{j+1}}{1-(j+1)x} + \cdots + \frac{A_k}{1-kx}\right\}$$

양 변에 $x=\frac{1}{j}$ 를 대입하면

$$\frac{\frac{1}{j^k}}{(1-\frac{1}{j})(1-\frac{2}{j})\cdots(1-\frac{j-1}{j})(1-\frac{j+1}{j})\cdots(1-\frac{k}{j})} = A_j$$

가 된다. 따라서

$$\begin{aligned} A_j &= \frac{1}{j(j-1)(j-2)\cdots\{j-(j-1)\}\cdot\{j-(j+1)\}\cdots(j-k)} \\ &= \frac{1}{j!(-1)^{k-j}(k-j)!} \\ &= \frac{(-1)^{k-j}}{k!}\binom{k}{j} \end{aligned}$$

이 된다. 따라서, 정의 1.4가 만족됨을 알 수 있다.

Ⅱ. $\left(x\frac{d}{dx}\right)^n$의 구체적 표현

이 장에서는 삼각함수의 Maclaurin 급수를 구하는데 있어서 중요하게 사용되는 공식에 대해서 살펴본 후, Stirling number를 연산자 $\left(x\frac{d}{dx}\right)^n$를 통해 유도해보도록 하겠다.

[보조정리 2.1] 임의의 식을 미분한 후 x를 곱한 것을 $x\frac{d}{dx}$, 이것을 n번 시행한 것을 $\left(x\frac{d}{dx}\right)^n$로 나타내면,

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^n x^k = \left(x\frac{d}{dx}\right)^n \left(\frac{1}{1-x}\right) \text{ 이다. (단, } x \neq 1\text{)}$$

(증명) 수학적 귀납법을 이용하자.

$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+\cdots$ 이다. 이 식의 양 변을 미분하면,

$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = 1+2x+3x^2+4x^3+\cdots$ 이 되므로

$n=1$일 때,

$$\left(x\frac{d}{dx}\right)^1 \left(\frac{1}{1-x}\right) = x+2x^2+3x^3+4x^4\cdots = \sum_{k=0}^{\infty} kx^k$$

가 성립한다. 임의의 양수 n에 대하여

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^n x^k = \left(x\frac{d}{dx}\right)^n \left(\frac{1}{1-x}\right) = 1^n x + 2^n x^2 + 3^n x^3 + \cdots + m^n x^m + \cdots$$

이 성립한다고 가정하자. 이 식의 양변을 미분하면,

$$\left\{\left(x\frac{d}{dx}\right)^n \left(\frac{1}{1-x}\right)\right\}' = 1^n 1 + 2^n 2x + 3^n 3x^2 + \cdots + m^n m x^{m-1} + \cdots$$

이 되고, 양변에 x를 곱하면

$$\left(x\frac{d}{dx}\right)^{n+1}\left(\frac{1}{1-x}\right)=1^{n+1}x+2^{n}x^{2+1}+\cdots+m^{n}x^{m+1}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}k^{n+1}x^{k}$$

이 된다. 따라서 $n+1$ 일 때도 $\sum_{k=0}^{\infty}k^{n+1}x^{k}=\left(x\frac{d}{dx}\right)^{n+1}\left(\frac{1}{1-x}\right)$ 식이 성립하므로 준 식은 성립한다. □

Stirling number는 다음과 같은 순환 점화식을 갖는다.

[보조정리 2.2] 자연수 n, k 에 대하여

$$\left\{ {n+1 \atop k} \right\}=k\left\{ {n \atop k} \right\}+\left\{ {n \atop k-1} \right\}$$ 이 성립한다.

(증명) 정의 1.1에 의해

$$k\left\{ {n \atop k} \right\}+\left\{ {n \atop k-1} \right\}=k\sum_{j=1}^{k}\frac{(-1)^{k-j}j^{n}}{j!(k-j)!}+\sum_{j=1}^{k-1}\frac{(-1)^{k-1-j}j^{n}}{j!(k-1-j)!}$$

$$= k\left\{\sum_{j=1}^{k-1}\frac{(-1)^{k-j}j^{n}}{j!(k-j)!}+\frac{k^{n}}{k!}\right\}+\sum_{j=1}^{k-1}\frac{(-1)^{k-j}j^{n}(-1)(k-j)}{j!(k-j)!}$$

$$= \left\{\sum_{j=1}^{k-1}\frac{(-1)^{k-j}j^{n}k}{j!(k-j)!}+\frac{k^{n+1}}{k!}\right\}-\left\{\sum_{j=1}^{k-1}\frac{(-1)^{k-j}j^{n}k}{j!(k-j)!}-\sum_{j=1}^{k-1}\frac{(-1)^{k-j}j^{n+1}}{j!(k-j)!}\right\}$$

$$= \frac{k^{n+1}}{k!}+\sum_{j=1}^{k-1}\frac{(-1)^{k-j}j^{n+1}}{j!(k-j)!} = \sum_{j=1}^{k}\frac{(-1)^{k-j}j^{n+1}}{j!(k-j)!}$$

$$= \left\{ {n+1 \atop k} \right\}.$$ □

[정리 2.1] 무한 번 미분 가능한 함수 $f(x)$에 대하여

$$\left(x\frac{d}{dx}\right)^{n}f(x)=\sum_{k=1}^{n}\left\{ {n \atop k} \right\}x^{k}\frac{d^{k}}{dx^{k}}f(x)$$ 이다.

(단, $\left\{ {n \atop k} \right\}=\sum_{j=1}^{k}\frac{(-1)^{k-j}j^{n}}{j!(k-j)!}$)

(증명) 수학적 귀납법을 이용하자.

$n=1$이면, $\left(x\frac{d}{dx}\right)^1 f(x)=\sum_{k=1}^{1}\left\{ {1 \atop k} \right\} x^k \frac{d^k}{dx^k} f(x)$

$$=\left\{ {1 \atop k} \right\} x\frac{d}{dx} f(x)=x\frac{d}{dx} f(x)$$

이므로 준 식이 성립한다.

n일 때, $\left(x\frac{d}{dx}\right)^n f(x)=\sum_{k=1}^{n}\left\{ {n \atop k} \right\} x^k \frac{d^k}{dx^k} f(x)$ 이 성립한다고 가정하자.

그러면, $\left(x\frac{d}{dx}\right)^{n+1} f(x)$

$$= \sum_{k=1}^{n+1}\left\{ {n+1 \atop k} \right\} x^k \frac{d^k}{dx^k} f(x)$$

$$= x\left\{ \sum_{k=1}^{n}\left\{ {n \atop k} \right\} kx^{k-1} \frac{d^k f}{dx^k} + \left\{ {n \atop k} \right\} x^k \frac{d^{k+1} f}{dx^{k+1}} \right\}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(k\left\{ {n \atop k} \right\} x^k \frac{d^k f}{dx^k} + \left\{ {n \atop k} \right\} x^{k+1} \frac{d^{k+1} f}{dx^{k+1}} \right)$$

$$= \left(1\left\{ {n \atop 1} \right\} x\frac{df}{dx} + \left\{ {n \atop 1} \right\} x^2 \frac{d^2 f}{dx^2}\right) + \left(2\left\{ {n \atop 2} \right\} x^2 \frac{d^2 f}{dx^2} + \left\{ {n \atop 2} \right\} x^3 \frac{d^3 f}{dx^3}\right)$$

$$+\left(3\left\{ {n \atop 3} \right\} x^3 \frac{d^3 f}{dx^3} + \left\{ {n \atop 3} \right\} x^4 \frac{d^4 f}{dx^4}\right) + \cdots + \left(n\left\{ {n \atop n} \right\} x^n \frac{d^n f}{dx^n} + \left\{ {n \atop n} \right\} x^{n+1} \frac{d^{n+1} f}{dx^{n+1}}\right)$$

$$= \left\{ {n \atop 1} \right\} x\frac{df}{dx} + \left(\left\{ {n \atop 1} \right\} + 2\left\{ {n \atop 2} \right\}\right) x^2 \frac{d^2 f}{dx^2} + \left(\left\{ {n \atop 2} \right\} + 3\left\{ {n \atop 3} \right\}\right) x^3 \frac{d^3 f}{dx^3}$$
$$+ \cdots + \left(\left\{ {n \atop n-1} \right\} + n\left\{ {n \atop n} \right\}\right) x^n \frac{d^n f}{dx^n} + \left\{ {n \atop n} \right\} x^{n+1} \frac{d^{n+1} f}{dx^{n+1}}$$

$$= \left\{ {n \atop 1} \right\} x\frac{df}{dx} + \sum_{k=2}^{n}\left(\left\{ {n \atop k-1} \right\} + k\left\{ {n \atop k} \right\}\right) x^k \frac{d^k f}{dx^k} + \left\{ {n \atop n} \right\} x^{n+1} \frac{d^{n+1} f}{dx^{n+1}}$$

보조정리 2.2 에 의해

$$= \left\{ {n \atop 1} \right\} x \frac{df}{dx} + \sum_{k=2}^{n} \left\{ {n+1 \atop k} \right\} x^k \frac{d^k f}{dx^k} + \left\{ {n \atop n} \right\} x^{n+1} \frac{d^{n+1} f}{dx^{n+1}}$$

$$= \left\{ {n+1 \atop 1} \right\} x \frac{df}{dx} + \sum_{k=2}^{n} \left\{ {n+1 \atop k} \right\} x^k \frac{d^k f}{dx^k} + \left\{ {n+1 \atop n+1} \right\} x^{n+1} \frac{d^{n+1} f}{dx^{n+1}}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left\{ {n+1 \atop k} \right\} x^k \frac{d^k f}{dx^k}$$ 이다.

따라서, $n+1$일 때에도 성립하므로, 준 식은 성립한다. □

이제, Stirling number를 유도해보도록 하겠다.

$$f(x) = e^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$$

라 놓고 정리 2.1 을 적용하면,

$$\left(x\frac{d}{dx}\right)^n e^x = \sum_{k=1}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} x^k \frac{d^k}{dx^k} e^x = \sum_{k=1}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} x^k e^x \text{ 가 된다.} \tag{2.1}$$

$$(e^x)' = \frac{1}{1!} x^0 + \frac{2}{2!} x^1 + \frac{3}{3!} x^2 \cdots + \frac{n}{n!} x^{n-1} + \cdots \text{ 이므로}$$

$$\left(x\frac{d}{dx}\right)^1 e^x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{j!} x^j \text{ 가 된다.}$$

$$\left(x\frac{d}{dx}\right)^2 e^x = x\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{j!} x^j\right)' = x\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^2}{j!} x^{j-1}\right\} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^2}{j!} x^j$$

이 된다. 마찬가지 방법으로 계속하면

$$\left(x\frac{d}{dx}\right)^n e^x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^n}{j!} x^j \tag{2.2}$$

가 된다. 따라서 (식 2.1), (식 2.2) 에 의해

$$e^x \sum_{k=1}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} x^k = \sum_{k=1}^{n} \frac{j^n}{j!} x^n$$

가 성립한다. 이 식의 양 변에 e^{-x}를 곱하면

$$e^{-x}e^{x}\sum_{k=1}^{n}\left\{ {n \atop k} \right\}x^{k}=e^{-x}\sum_{k=1}^{n}\frac{j^{n}}{j!}x^{n} = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^{i}}{i!}x^{i}\sum_{k=1}^{n}\frac{j^{n}}{j!}x^{n}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i}j^{n}}{i!j!}x^{i+j}$$

$i+j=k$ 라고 치환하면

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{k}\frac{(-1)^{k-j}j^{n}}{(k-j)!\,j!}x^{k}$$

가 된다. 따라서,

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{ {n \atop k} \right\}x^{k} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{k}\frac{(-1)^{k-j}j^{n}}{(k-j)!\,j!}x^{k}$$ 가 되므로,

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \sum_{j=1}^{k}\frac{(-1)^{k-j}j^{n}}{(k-j)!\,j!}$$ 이 성립한다.

정리 2.1에서 $f(x)=\frac{1}{1-x}$ 라 놓으면, $f^{(k)}(x)=\frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$ 가 되고, 보조정리 2.1에 의해

$$\sum_{k=0}^{\infty}k^{n}x^{k} = \left(x\frac{d}{dx}\right)^{n}\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left\{ {n \atop k} \right\}x^{k}\frac{d^{k}}{dx^{k}}\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left\{ {n \atop k} \right\}x^{k}\frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$$

이 된다. 그러므로 무한급수

$$\sum_{k=0}^{\infty}k^{n}x^{k} = \sum_{k=0}^{n}\left\{ {n \atop k} \right\}\frac{k!}{(1-x)^{k+1}}x^{k}$$

가 된다.

Ⅲ. 삼각함수의 Maclaurin 급수

이 장에서는 $\sin x$, $\cos x$를 멱급수로 표현하고, 그 외 삼각함수를 Maclaurin 급수로 표현해보도록 하겠다.

[정리 3.1] (Taylor 정리)

점 a와 b를 포함하는 어떤 구간에서 함수 $f(x)$가 $(n+1)$번째 까지의 도함수들이 존재한다고 하자. 그러면, 모든 $x\in[a,\ b]$ 에 대하여

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x)$$

$$\left(\text{단},\ R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\right)$$

이 성립하는 z가 a와 b 사이에 존재한다.

함수 $f(x)$가 점 a의 근방에서 모든 차수의 연속인 도함수를 가진다고 하자. 그러면 Taylor 공식은

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x)$$

를 준다. 여기서

$$P(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

이고, a와 x 사이의 어떤 수 z에 대하여

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

이다. 만일 어떤 고정된 값 x에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$$

이면,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} P_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right)$$

가 되며, 따라서

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

$$= f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots$$

이다. 이 무한급수를 $x=a$에서 함수 $f(x)$의 Taylor 급수라 한다.
특히, $a=0$에 대한 Taylor 급수

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

를 함수 f의 Maclaurin 급수라 한다.

그러면 우선 삼각함수 $\sin x$, $\cos x$를 멱급수로 표현하는 법을 알아보도록 하겠다. 만약 함수 $f(x)$가 멱급수 전개를 가진다고 가정하면,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

이다. 따라서 만약 $\sin x$ 가 멱급수 전개를 가진다면 이는

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

와 같아야 한다. 마찬가지로 만약 $\cos x$ 가 멱급수 전개를 가진다면 이는

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$$

와 같아야 한다.
이제 멱급수함수 $S(x)$와 $C(x)$가 실제로 $\sin x$와 $\cos x$ 임을 보이겠다. 우선 두 멱급수의 수렴반경은, 비율판정법에 의해 모두 무한대가 됨을 알 수 있다. 따라서 두 멱급수는 실수 전체에서 정의된 함수가 되고, 이때,

$$S'(x) = C(x), \quad C'(x) = -S(x)$$

가 된다. 한편 함수

$$f(x)=(S(x)-\sin x)^2+(C(x)-\cos x)^2$$

는 도함수가

$$\begin{aligned} f'(x)&=2(S(x)-\sin x)(S'(x)-\cos x)+2(C(x)-\cos x)(C'(x)+\sin x) \\ &=2(S(x)-\sin x)(C(x)-\cos x)+2(C(x)-\cos x)(-S(x)+\sin x) \\ &=0 \end{aligned}$$

이 되어 함수 $f(x)$는 상수함수가 된다. 그리고 원점에서의 함수 값이 또한 0 이므로, $f(x)$는 항상 0이 된다. 그러므로 $S(x)=\sin x$, $C(x)=\cos x$ 가 된다.

즉, $$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$$

이 된다.

$\tan x$의 Maclaurin 급수

$\tan x$의 Maclaurin 급수를 알아보기 위해 $\tan x$를 오일러 함수를 이용해서 나타내면,

$$e^x=\cos x+i\sin x$$

이므로

$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2},\quad \sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

가 되고,

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}}{\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}} = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{i(e^{ix}+e^{-ix})} = -i\frac{e^{2ix}-1}{e^{2ix}+1}$$

$$= \frac{2i}{e^{2ix}+1} - i \qquad (3.1)$$

로 나타낼 수 있다.

따라서, $\tan x$를 Maclaurin 급수로 표현하려면, $\frac{2i}{e^{2ix}+1}$가 어떻게 표현되는지를 알아보아야 하겠다. 이를 위해서 다음과 같은 정리가 필요하다.

[정리 3.2] $\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{1}{e^z+1}\right)\Big|_{z=0} = \sum_{k=1}^{n}\left\{ {n \atop k} \right\}\frac{(-1)^k k!}{2^{k+1}}$ 이다.

(단, z는 복소수, $\left\{ {n \atop k} \right\}$는 Stirling number)

(증명) $e^z = u$ 라 놓으면

$\frac{du}{dz} = \frac{d}{dz}(e^z) = e^z = u$ 이므로

$$\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{1}{e^z+1}\right) = \left(u\frac{d}{du}\right)^n\left(\frac{1}{u+1}\right)$$

정리 2.1 에 의해

$$= \sum_{k=1}^{n}\left\{ {n \atop k} \right\}u^k\frac{d^k}{du^k}\left(\frac{1}{u+1}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left\{ {n \atop k} \right\}u^k(-1)^k k!\,(u+1)^{-(k+1)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left\{ {n \atop k} \right\}(e^z)^k(-1)^k k!\,(e^z+1)^{-(k+1)} \qquad (3.2)$$

이 된다. 따라서

$$\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{1}{e^z+1}\right)\Big|_{z=0} = \sum_{k=1}^{n}\left\{ {n \atop k} \right\}(e^0)^k(-1)^k k!\,(e^0+1)^{-(k+1)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left\{ {n \atop k} \right\}\frac{(-1)^k k!}{2^{k+1}}. \qquad \square$$

정리 3.2을 $\tan x$에 적용하기 위해 (식 3.1)에서 $z=2ix$ 로 치환하면

$$\tan x = \frac{2i}{e^{2ix}+1} - i = \frac{2i}{e^z+1} - i$$ 이므로

$$\frac{1}{e^z+1} = \frac{1}{2i}(\tan x + i)$$

가 된다. 그리고,

$$\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{1}{e^z+1}\right) = \frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{1}{2i}(\tan x+i)\right) = \frac{d^n}{(2i\,dx)^n}\left(\frac{1}{2i}(\tan x+i)\right)$$

$$= \frac{1}{(2i)^{n+1}}\frac{d^n}{dx^n}(\tan x+i)$$

가 되므로, (식 3.2)에 의해

$$\frac{1}{(2i)^{n+1}}\frac{d^n}{dx^n}(\tan x+i) = \frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{1}{e^z+1}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left\{ {n \atop k} \right\}(e^{2xi})^k(-1)^k k!\,(e^{2xi}+1)^{-(k+1)}$$

이 된다. $(\tan x+i)$를 미분하면 i 는 없어지므로

$$\frac{d^n}{dx^n}(\tan x+i) = \frac{d^n}{dx^n}(\tan x)$$

$$= (2i)^{n+1}\sum_{k=1}^{n}\left\{ {n \atop k} \right\}(e^{2xi})^k(-1)^k k!\,(e^{2xi}+1)^{-(k+1)}$$

$$= (i)^{n+1}\sum_{k=1}^{n}\left\{ {n \atop k} \right\}2^{n+1}(-1)^k k!\frac{(e^{2xi})^k}{(e^{2xi}+1)^{k+1}}$$

가 된다. 따라서, $\tan x$의 $x=0$ 에서의 x^n의 계수는

$$\frac{d^n}{dx^n}(\tan x)|_{x=0} = (i)^{n+1}\sum_{k=1}^{n}\left\{ n \atop k \right\} 2^{n+1}(-1)^k k! \frac{(e^0)^k}{(e^0+1)^{k+1}}$$

$$= (i)^{n+1}\sum_{k=1}^{n}\left\{ n \atop k \right\}(-1)^k k!\, 2^{n-k} \qquad (3.3)$$

가 된다. 그런데 $\tan x$ 는 실수이므로 허수부분은 0이 되어야 한다. 즉, n이 짝수일 때 x^n의 계수가 0이 되어야 하므로, n 대신 $2n+1$을 대입하면 x^{2n+1}의 계수는

$$(-1)^{n+1}\sum_{k=1}^{2n+1}\left\{ 2n+1 \atop k \right\}(-1)^k k!\, 2^{2n-k+1}$$

이 된다. 따라서, $\tan x$의 Maclaurin 급수는

$$\tan x = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{(-1)^{n+k+1}k!\, 2^{2n-k+1}}{(2n+1)!}\left\{ 2n+1 \atop k \right\} x^{2n+1}$$ 이 된다.

$x\cot x$의 Maclaurin 급수

$\cot x$ 함수는 $x=0$에서 정의되지 않으므로 Maclaurin 급수를 갖지 않는다. 반면에

$$x\cot x = x\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\cdots}{1-\frac{1}{3!}x^2+\frac{1}{5!}x^4-\cdots}$$

이므로 $x\cot x$는 $x=0$ 에서 정의되고 1 값을 갖는다. 따라서 $x\cot x$의 Maclaurin 급수를 구해보도록 하겠다.

$$x\cot x = x\frac{\cos x}{\sin x} = x\frac{\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}}{\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}} = \frac{2xi}{e^{2xi}-1} + ix$$ 이다.

따라서, $x\cot x$의 Maclaurin 급수를 알기 위해서, 우선, $\dfrac{2xi}{e^{2xi}-1}+ix$가 어떻게 표현되는지 살펴보도록 하자. 이를 위해 필요한 몇 가지 정리들에 대해 살펴보자.

[보조정리 3.1] 무한 번 미분 가능한 함수 $f(z)$에 대하여

$\dfrac{d^n}{dz^n}(zf(z)) = z\dfrac{d^n}{dz^n}f(z)+n\dfrac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}f(z)$ 이 성립한다.

(단, z 는 복소수)

(증명) 수학적 귀납법을 이용하자.

$n=1$ 일때, $\dfrac{d}{dz}(zf(z)) = f(z)+z\dfrac{d}{dz}f(z)$ 이므로 준 식이 성립한다.

$n=k$ 일때, $\dfrac{d^k}{dz^k}(zf(z)) = z\dfrac{d^k}{dz^k}f(z)+k\dfrac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}f(z)$이 성립한다고 가정하자.

$$\begin{aligned}\left(z\frac{d^k}{dz^k}f(z)+k\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}f(z)\right)' &= 1\cdot\frac{d^k}{dz^k}f(z)+z\cdot\frac{d^{k+1}}{dz^{k+1}}f(z)+k\frac{d^k}{dz^k}f(z)\\ &= z\cdot\frac{d^{k+1}}{dz^{k+1}}f(z)+(k+1)\frac{d^k}{dz^k}f(z)\\ &= \frac{d^{k+1}}{dz^{k+1}}(zf(z))\end{aligned}$$

이므로 $n=k+1$ 일 때도 성립한다. 따라서 준 식은 성립한다. □

[정리 3.3] $\displaystyle\lim_{z\to0}\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{z}{e^z-1}\right) = \frac{-n}{2^n-1}\,\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(\frac{1}{e^z+1}\right)\Big|_{z=0}$ 이다.

(단, z는 복소수)

(증명) $\dfrac{2z}{e^{2z}-1} = \dfrac{z}{e^{z}-1} - \dfrac{z}{e^{z}+1}$ 이므로

이 식의 양변을 n번 미분하면

$$\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{2z}{e^{2z}-1}\right) = \frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{z}{e^{z}-1}\right) - \frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{z}{e^{z}+1}\right)$$

이 된다. $2z = u$ 라 치환하면

$$\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{2z}{e^{2z}-1}\right) = 2^n\frac{d^n}{du^n}\left(\frac{u}{e^{u}-1}\right)$$

가 되므로,

$$\lim_{u\to 0}2^n\frac{d^n}{du^n}\left(\frac{u}{e^{u}-1}\right) = \lim_{z\to 0}\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{2z}{e^{2z}-1}\right)$$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{z}{e^{z}-1}\right) - \frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{z}{e^{z}+1}\right)\Big|_{z=0}$$

이 되고

$$\lim_{z\to 0}(2^n-1)\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{z}{e^{z}-1}\right) = -\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{z}{e^{z}+1}\right)\Big|_{z=0}$$

이 된다. 따라서,

$$\lim_{z\to 0}\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{z}{e^{z}-1}\right) = \frac{-1}{2^n-1}\,\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{z}{e^{z}+1}\right)\Big|_{z=0} \tag{3.4}$$

이다. $f(z) = \dfrac{1}{e^{z}+1}$ 라 놓고 보조정리 3.1 을 적용하면

$$\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{z}{e^{z}+1}\right) = z\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{1}{e^{z}+1}\right) + n\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(\frac{1}{e^{z}+1}\right)$$ 이 되고

$$\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{z}{e^{z}+1}\right)\Big|_{z=0} = n\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(\frac{1}{e^{z}+1}\right)\Big|_{z=0} \tag{3.5}$$ 이 된다.

따라서

$$\lim_{z\to 0}\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{z}{e^{z}-1}\right) = \frac{-1}{2^n-1}\,n\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(\frac{1}{e^{z}+1}\right)\Big|_{z=0}$$

$$= \frac{-n}{2^n-1}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(\frac{1}{e^z+1}\right)\Big|_{z=0}.$$

이 되어 정리가 성립한다. □

정리 3.3을 이용하여 $x\cot x$의 Maclaurin 급수를 구해보자

$x\cot x$의 x^n의 계수를 구하기 위해 $2xi=z$로 치환하고, $n\geq 2$라 가정하면,

$$\lim_{x\to 0}\frac{d^n}{dx^n}(x\cot x) = \lim_{z\to 0}(2i)^n\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{z}{e^z-1}+\frac{z}{2}\right)$$

$$= (2i)^n\lim_{z\to 0}\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{z}{e^z-1}\right)$$

정리 3.3에 의해

$$= (2i)^n\frac{-n}{2^n-1}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(\frac{1}{e^z+1}\right)\Big|_{z=0}$$

정리 3.2에 의해

$$= \frac{i^n(-n)2^n}{2^n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}k!}{2^{k+1}}\left\{ {n-1 \atop k} \right\}$$

이 된다. $x\cot x$는 실수이므로 위 식에서 n이 홀수일 때 x^n의 계수가 0 이 되어야 한다. 그러므로 n대신 $2n$을 대입하면, $x\cot x$의 x^{2n}의 계수는

$$\frac{(-1)^{n+1}n2^{2n}}{2^{2n}-1}\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{(-1)^k k!}{2^k}\left\{ {2n-1 \atop k} \right\}$$

이 된다. $n=0$일 때 $x\cot x|_{x=0}=1$, $n=1$일 때 $x\cot x|_{x=0}=0$ 값을 갖는다. 따라서 $x\cot x$의 Maclaurin 급수는

$$x\cot x = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n2^{2n}}{(2n)!\,(2^{2n}-1)}\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{(-1)^k k!}{2^k}\left\{ {2n-1 \atop k} \right\}x^{2n}$$ 이 된다.

$x\csc x$ 의 Maclaurin 급수

$\csc x$ 함수는 $x=0$에서 정의되지 않는다. 따라서 Maclaurin 급수를 갖지 않는다. 반면에, $x\csc x = \frac{x}{\sin x} = \frac{ix}{e^{ix}-1} + \frac{ix}{e^{ix}+1}$ 이므로, $x\csc x$는 $x=0$에서 정의되고 1값을 갖는다. 따라서 $x\csc x$의 Maclaurin 급수를 구해보도록 하겠다.

$x\csc x = \frac{ix}{e^{ix}-1} + \frac{ix}{e^{ix}+1}$ 이므로, $\frac{ix}{e^{ix}-1} + \frac{ix}{e^{ix}+1}$가 어떻게 표현되는지 우선 살펴보자.

$x\csc x$의 x^n의 계수를 구해보면,

$$\lim_{x\to 0}\frac{d^n}{dx^n}(x\csc x) = \lim_{x\to 0}\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{ix}{e^{ix}-1}\right) + \lim_{x\to 0}\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{ix}{e^{ix}+1}\right)$$

$ix=z$ 로 치환하면,

$$= \lim_{z\to 0} i^n\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{z}{e^z-1}\right) + i^n\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{z}{e^z+1}\right)\Big|_{z=0}$$

(식 3.4)에 의해

$$= i^n\frac{-1}{2^n-1}\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{z}{e^z+1}\right)\Big|_{z=0} + i^n\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{z}{e^z+1}\right)\Big|_{z=0}$$

$$= \frac{i^n(2^n-2)}{2^n-1}\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{z}{e^z+1}\right)\Big|_{z=0}$$

(식 3.5)에 의해

$$= \frac{i^n(2^n-2)}{2^n-1}\, n\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(\frac{1}{e^z+1}\right)\Big|_{z=0}$$

정리 3.2에 의해

$$= \frac{i^n(2^n-2)\,n}{2^n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k k!}{2^{k+1}}\left\{ {n-1 \atop k} \right\}$$

이다. $x\csc x$는 실수이므로, 위 식에서 n이 홀수일 때 x^n의 계수가 0이 되어야 한다. 그러므로, n 대신 $2n$을 대입하면 $x\csc x$의 x^{2n}의 계수는

$$\frac{(-1)^n(2^{2n}-2)n}{(2^{2n}-1)}\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{(-1)^k k!}{2^k}\left\{\begin{matrix}2n-1\\k\end{matrix}\right\}$$

이 된다. $x=0$ 일 때, $x\csc x|_{x=0}=1$ 값을 갖는다. 따라서, $x\csc x$ 의 Maclaurin 급수는

$$x\csc x=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2^{2n}-2)n}{(2n)!\,(2^{2n}-1)}\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{(-1)^k k!}{2^k}\left\{\begin{matrix}2n-1\\k\end{matrix}\right\}x^{2n}$$ 이 된다.

$\sec x$의 Maclaurin 급수

$\sec x$를 오일러 함수를 이용해 나타내면

$$\sec x=\frac{1}{\cos x}=\frac{2}{e^{ix}+e^{-ix}}=\frac{2e^{ix}}{e^{2ix}+1}$$

이 된다. 따라서 $\sec x$의 Maclaurin 급수를 구하기 위해 $\dfrac{2e^{ix}}{e^{2ix}+1}$이 어떻게 표현되는지 살펴보도록 하겠다. 이를 위해 필요한 몇 가지 정리에 대해 살펴보자.

[보조정리 3.2] (이항계수의 역 공식)

임의의 수열 $\{v_j\}_{j=0}^{n}$ 과 $\{w_k\}_{k=0}^{n}$ 에 대하여

$$w_j=\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}(-1)^k v_k\ (j=0,1,2,\cdots,n)$$

$$\Leftrightarrow\ v_k=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^j w_j\ (k=0,1,2,\cdots,n)$$ 이 성립한다.

(증명) w_j와 v_k는 서로 대칭관계에 있으므로 한쪽 방향의 증명만 보이면 양방향이 모두 성립함을 알 수 있으므로, 한쪽 방향만 보이도록 하겠다.

$w_j = \sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}(-1)^k v_k$ 이 성립한다고 가정하자. 그러면,

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^j w_j = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^j\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}(-1)^i v_i = \sum_{j=0}^{k}\sum_{i=0}^{j}\binom{k}{j}\binom{j}{i}(-1)^{j+i}v_i$$

$$\left(\begin{aligned}\binom{k}{j}\binom{j}{i} &= \frac{k!}{j!(k-j)!}\frac{j!}{i!(j-i)!} = \frac{k!}{(k-j)!\,i!\,(j-i)!}\frac{(k-j)!}{(k-j)!}\\ &= \frac{k!}{(k-i)!\,i!}\frac{(k-i)!}{(k-j)!\,(j-i)!} = \binom{k}{i}\binom{k-j}{j-i}\end{aligned}\right)$$

$$= \sum_{j=0}^{k}\sum_{i=0}^{j}\binom{k}{i}\binom{k-j}{j-i}(-1)^{j+i}v_i$$

$$= \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=i}^{k}\binom{k}{i}\binom{k-j}{j-i}(-1)^{j+i}v_i$$

$$= v_k + \sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}v_i\sum_{j=i}^{k}\binom{k-j}{j-i}(-1)^{j-i}$$ 이 된다.

$$\sum_{j=i}^{k}\binom{k-j}{j-i}(-1)^{j-i} = \sum_{j=i}^{k}\binom{k-j}{j-i}(1)^{k-j}(-1)^{j-i} = \{1+(-1)\}^{k-j} = 0$$

이므로

$$\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}v_i\sum_{j=i}^{k}\binom{k-j}{j-i}(-1)^{j-i} = \sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}v_i\cdot 0 = 0$$

이 된다. 따라서,

$\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^j w_j = v_k$ 이 성립한다. □

[보조정리 3.3] $g_n(u) = \left(u\frac{d}{du}\right)^n \left(\frac{u}{u^2+1}\right)$ 라 놓으면

$$g_n(u) = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j (2j+1)^n u^{2j+1}$$ 이다.

(증명) $\frac{u}{u^2+1}$ 를 무한등비급수로 나타내면,

$$\frac{u}{u^2+1} = \frac{u}{1-(-u^2)} = u(1-u^2+u^4-u^6+\cdots)$$

$$= u\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j u^{2j} = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j u^{2j+1}$$ 이 되므로,

$$g_n(u) = \left(u\frac{d}{du}\right)^n \left(\frac{u}{u^2+1}\right) = \left(u\frac{d}{du}\right)^n \left(\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j u^{2j+1}\right)$$

를 이용하여 정리가 성립함을 보이겠다. 수학적 귀납법을 이용하면

$n=1$ 일 때,

$$\left(u\frac{d}{du}\right)^1 \left(\frac{u}{u^2+1}\right) = u\frac{d}{du}\left(\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j u^{2j+1}\right) = u\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j (2j+1)\, u^{2j}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j (2j+1)\, u^{2j+1} = g_1(u)$$ 이 성립한다.

$n=k$ 일 때,

$$g_k(u) = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j (2j+1)^k u^{2j+1}$$ 이 성립한다고 가정하면,

$$u\frac{d}{du}\left(\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j (2j+1)^k u^{2j+1}\right) = u\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j (2j+1)^{k+1} u^{2j}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j (2j+1)^{k+1} u^{2j}+1$$

$$= g_{k+1}(u)$$

가 되어 $n=k+1$ 일 때도 성립하므로 준 식은 성립한다. □

[정리 3.4] $g_n(u) = \left(u\frac{d}{du}\right)^n \left(\frac{u}{u^2+1}\right)$ 라 놓으면

$$g_n(u) = \sum_{k=0}^{n} a_{nk} u^{2k+1}(u^2+1)^{-k-1} \text{ 이다.}$$

(단, $a_{nk} = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j}(2j+1)^n$, $a_{n0} = 1$)

(증명) $(u^2+1)^{-k-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{-k-i}{i} u^{2i}$

$$\left(\begin{aligned} \binom{-k-i}{i} &= \frac{(-k-1)(-k-2)\cdots(-k-i)}{i!} = \frac{(-1)^i(k+1)(k+2)\cdots(k+i)}{i!} \\ &= \frac{(-1)^i(k+i)\cdots(k+2)(k+1)k!}{i!\,k!} = (-1)^i\frac{(k+i)!}{i!\,k!} \\ &= (-1)^i\binom{k+i}{k} \end{aligned} \right)$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{k+i}{k} u^{2i} \quad \text{이므로}$$

$$g_n(u) = \sum_{k=0}^{n} a_{nk} u^{2k+1}(u^2+1)^{-k-1} = \sum_{k=0}^{n} a_{nk} u^{2k+1} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{k+i}{k} u^{2i}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{k+i}{k} a_{nk} u^{2(k+i)+1}$$

$k+i=j$ 라 놓으면

$$= \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{j} (-1)^{j-k} \binom{j}{k} a_{nk} u^{2j+1} + \sum_{j=n+1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{j-k} \binom{j}{k} a_{nk} u^{2j+1}$$

이 된다. 위 식을 보조정리 3.3 과 비교해보면

$$(2j+1)^n = \sum_{k=0}^{j} (-1)^k \binom{j}{k} a_{nk}$$

임을 볼 수 있다. 보조정리 3.2 에 의해 $w_j = (2j+1)^n$, $v_k = a_{nk}$ 라 놓으면,

$$a_{nk} = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} (2j+1)^n$$

이 성립한다. 따라서, $g_n(u) = \sum_{k=0}^{n} a_{nk} u^{2k+1} (u^2+1)^{-k-1}$ 이 성립한다. □

$\sec x = \dfrac{2e^{ix}}{e^{2ix}+1}$ 이므로, $\sec x$ 의 x^n의 계수를 구하기 위해

$$g_n(u) = \left(u\frac{d}{du}\right)^n \left(\frac{u}{u^2+1}\right)$$

이라 놓고, $e^{ix} = u$ 로 치환하면

$$\frac{d^n}{dx^n}(\sec x) = \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{2e^{ix}}{e^{2ix}+1}\right) = \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{2 \cdot e^{ix}}{(e^{ix})^2+1}\right)$$

$$= 2(iu)^n \frac{d^n}{du^n}\left(\frac{u}{u^2+1}\right) = 2i^n g_n(u) = 2i^n g_n(e^{ix})$$

가 된다. 따라서,

$$\frac{d^n}{dx^n}(\sec x)|_{x=0} = 2i^n g_n(e^{ix})|_{x=0}$$

$$= 2i^n \sum_{k=0}^{n} a_{nk} (e^{ix})^{2k+1} (e^{2ix}+1)^{-k-1}|_{x=0}$$

$$= i^n \sum_{k=0}^{n} a_{nk} 2^{-k}$$

이다. $\sec x$ 함수는 실수이므로, 위 식에서 n이 홀수일 때 x^n의 계수가 0이 되어야 한다. 따라서, n 대신 $2n$을 대입하면, $\sec x$의 x^{2n}의 계수는 $(-1)^n \sum_{k=0}^{2n} a_{2nk} 2^{-k}$ 이 된다. 따라서, $\sec x$ 의 Maclaurin 급수는

$$\sec x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \sum_{k=0}^{2n} a_{2nk} 2^{-k} x^{2n} \quad \left(\text{단, } a_{2nk} = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} (2j+1)^{2n}\right)$$

이 된다.

Ⅳ. 쌍곡함수의 Maclaurin 급수

이 장에서는 $\sinh x$, $\cosh x$에 대해서 알아보고, 그 외 쌍곡함수를 Maclaurin 급수로 표현해보도록 하겠다.

$\sinh x$, $\cosh x$의 Maclaurin 급수

쌍곡코사인(hyperbolic cosine)과 쌍곡사인(hyperbolic sine)은 각각 실수 x의 $\cosh x$ $\sinh x$로 나타내는데

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \ , \ \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

로 정의한다. 그리고,

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$$

이므로, 이 식을 정리하면

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}x^{2n}, \ \sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$ 이 된다.

$\tanh x$ 의 Maclaurin 급수

$\tanh x$의 Maclaurin 급수를 알아보기 위해 $\tanh x$를 오일러 함수를 이용해 나타내면

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{2}{e^{-2x} + 1} - 1$$ 이 된다.

따라서, $\tanh x$를 Maclaurin 급수로 표현하기 위해 $\dfrac{2}{e^{-2x}+1}$를 Maclaurin 급수로 나타낼 필요가 있다.

$\tanh x$의 x^n의 계수를 구하면,

$$\frac{d^n}{dx^n}(\tanh x) = \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{2}{e^{-2x}+1}-1\right)$$

$-2x=z$로 치환하면

$$= (-2)^n\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{2}{e^z+1}-1\right) = (-1)^n 2^{n+1}\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{1}{e^z+1}-1\right)$$

(식 3.2)에 의해

$$= (-1)^n 2^{n+1}\sum_{k=1}^{n}\left\{ {n \atop k} \right\}(e^z)^k(-1)^k k!\,(e^z+1)^{-(k+1)}$$

$$= (-1)^n 2^{n+1}\sum_{k=1}^{n}\left\{ {n \atop k} \right\}(e^{-2x})^k(-1)^k k!\,(e^{-2x}+1)^{-(k+1)}$$

이 된다. 따라서, x^n의 계수는

$$\frac{d^n}{dx^n}(\tanh x)\Big|_{x=0} = (-1)^n 2^{n+1}\sum_{k=1}^{n}\left\{ {n \atop k} \right\}(e^0)^k(-1)^k k!\,(e^0+1)^{-(k+1)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left\{ {n \atop k} \right\}(-1)^{n+k}k!\,2^{n-k}$$

이 된다. 그러므로, $\tanh x$의 Maclaurin 급수는

$$\tanh x = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{n+k}k!\,2^{n-k}}{n!}\left\{ {n \atop k} \right\}x^n$$ 이 된다.

$x\coth x$ 함수의 Maclaurin 급수

$\cot x$와 마찬가지로 $\coth x$함수도 역시 $x=0$에서 정의되지 않는다. 반면에

$$x\coth x = x\frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots}{1+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+\cdots}$$

이므로, $x\coth x$는 $x=0$에서 정의되고 1의 값을 갖는다. 따라서 $x\coth x$ 함수의 Maclaurin 급수를 구할 수 있다.

$$x\coth x = \frac{-2x}{e^{-2x}-1}-x$$

이므로 $x\coth x$의 Maclaurin 급수를 구하기 위해 $\frac{-2x}{e^{-2x}-1}-x$이 어떻게 표현되는지 살펴보도록 하자.

$x\coth x$의 x^n의 계수를 구하기 위해, $z=-2x$라 치환하고, $n\geq 2$라 가정하면,

$$\lim_{x\to 0}\frac{d^n}{dx^n}(x\coth x) = \lim_{x\to 0}\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{-2x}{e^{-2x}-1}-x\right)$$

$$= \lim_{z\to 0}(-2)^n\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{z}{e^z-1}+\frac{z}{2}\right)$$

$n\geq 2$ 이므로

$$= \lim_{z\to 0}(-2)^n\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{z}{e^z-1}\right)$$

정리 3.3에 의해

$$= (-2)^n\frac{-n}{2^n-1}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(\frac{1}{e^z+1}\right)\Big|_{z=0}$$

정리 3.2에 의해

$$= (-2)^n\frac{-n}{2^n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^k k!}{2^{k+1}}\left\{ {n-1 \atop k} \right\}$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}n2^n}{2^n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^k k!}{2^{k+1}}\left\{ {n-1 \atop k} \right\}$$ 이 된다.

$n=1$일 때,

$$\lim_{x\to 0}\frac{d}{dx}(x\coth x) = \lim_{x\to 0}\frac{d}{dx}\left(\frac{-2x}{e^{-2x}-1}-x\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{-4xe^{-2x}-2e^{-2x}+2}{(e^{-2x}-1)^2}-1\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{-4xe^{-2x}-e^{-4x}+1}{e^{-4x}-2e^{-2x}+1}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{8xe^{-2x}-4e^{-2x}+4e^{-4x}+1}{-4e^{-4x}+4e^{-2x}+1}\right) = 1$$

이 되어 $x\coth x$가 1값을 갖는다. 따라서 $x\coth x$ 의 Maclaurin 급수는

$$x\coth x = 1+x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n2^n}{n!(2^n-1)}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^k k!}{2^{k+1}}\left\{ {n-1 \atop k} \right\} x^n$$ 이 된다.

$x\operatorname{csc}hx$의 Maclaurin 급수

$\operatorname{csc}hx$ 함수는 $x=0$에서 정의되지 않는다. 따라서 Maclaurin 급수를 갖지 않는다. 반면에, $x\operatorname{csc}hx$는 $x=0$에서 정의되고 1값을 갖는다. 따라서 $x\operatorname{csc}hx$의 Maclaurin 급수를 구해보도록 하겠다.

$$x\operatorname{csc}hx = \frac{x}{\sinh x} = \frac{-x}{e^{-x}-1}+\frac{-x}{e^{-x}+1}$$

이다. 따라서, $\frac{-x}{e^{-x}-1}+\frac{-x}{e^{-x}+1}$ 값이 어떻게 표현되는지 알아보겠다.

$x\operatorname{csc}hx$의 x^n의 계수를 구하기 위해 $-x=z$ 로 치환하여 계산하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{d^n}{dx^n}(x\operatorname{csc}hx) = \lim_{x\to 0}\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{-x}{e^{-x}-1}\right)+\lim_{x\to 0}\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{-x}{e^{-x}+1}\right)$$

$$= \lim_{z\to 0}(-1)^n\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{z}{e^z-1}\right)+(-1)^n\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{z}{e^z+1}\right)\Big|_{z=0}$$

(식 3.4)에 의해

$$= (-1)^n \frac{-1}{2^n-1} \frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{z}{e^z+1}\right)|_{z=0} + (-1)^n \frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{z}{e^z+1}\right)|_{z=0}$$

$$= \frac{(-1)^n(2^n-2)}{2^n-1} \frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{z}{e^z+1}\right)|_{z=0}$$

보조정리 3.1 에 의해

$$= \frac{(-1)^n(2^n-2)}{2^n-1}\left\{z\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{1}{e^z+1}\right)+n\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(\frac{1}{e^z+1}\right)\right\}|_{z=0}$$

$$= \frac{(-1)^n(2^n-2)\,n}{2^n-1} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(\frac{1}{e^z+1}\right)|_{z=0}$$

정리 3.2 에 의해

$$= \frac{(-1)^n n(2^n-2)}{2^n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k k!}{2^{k+1}}\left\{ {n-1 \atop k} \right\}$$ 이 된다.

따라서 $x\operatorname{csc}hx$의 Maclaurin 급수는

$$x\operatorname{csc}hx = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n(2^n-2)}{n!\,(2^n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k k!}{2^{k+1}}\left\{ {n-1 \atop k} \right\} x^n$$ 이 된다.

$\operatorname{sec}hx$ 함수의 Maclaurin 급수

$\operatorname{sec}hx$를 오일러 함수를 이용해서 나타내면

$\operatorname{sec}hx = \dfrac{1}{\cosh x} = \dfrac{2e^{-x}}{e^{-2x}+1}$ 이다.

여기서, $\dfrac{2e^{-x}}{e^{-2x}+1}$가 어떻게 표현되는지 살펴보기 위해, $\sec x$와 마찬가지로 $g_n(u) = \left(u\dfrac{d}{du}\right)^n\left(\dfrac{u}{u^2+1}\right)$ 라 놓고, $e^{-x} = u$ 라 치환하여 x^n의 계수를

구하면,

$$\frac{d^n}{dx^n}(\operatorname{sech} x) = \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{2e^{-x}}{(e^{-x})^2+1}\right) = \left(-u\frac{d}{du}\right)^n\left(\frac{2u}{u^2+1}\right)$$

$$= (-1)^n 2\left(u\frac{d}{du}\right)^n\left(\frac{u}{u^2+1}\right) = (-1)^n 2g_n(u)$$

$$= (-1)^n 2g_n(e^{-x})$$

정리 3.4 에 의해

$$= (-1)^n 2\sum_{k=0}^{n} a_{nk}(e^{-x})^{2k+1}(e^{-2x}+1)^{-k-1}$$

이 된다. 따라서,

$$\frac{d^n}{dx^n}(\operatorname{sech} x)|_{x=0} = (-1)^n 2\sum_{k=0}^{n} a_{nk}(e^0)^{2k+1}(e^0+1)^{-k-1}$$

$$= (-1)^n \sum_{k=0}^{n} a_{nk}2^{-k}$$

이 된다. 그러므로 $\operatorname{sech} x$의 Maclaurin 급수는

$$\operatorname{sech} x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\sum_{k=0}^{n} a_{nk}2^{-k}x^n \quad (\text{단, } a_{nk} = \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}(2j+1)^n)$$

이 된다.

참 고 문 헌

[1] P. M. Knopf, The Operater $\left(x\frac{d}{dx}\right)^n$ and Its Applications to Series, Mathematics Magazine, vol.76, No.5, December 2003, pp. 364-371

[2] L. Comtet, Advanced Combinatorics, D. Reidel publishing company(1974) pp. 204-219

[3] 김주영, A study on stirling Numbers of the First and Second kind, 2002

[4] 인하대학교 출판부, 미적분학, pp. 271-273, 306-308

[5] 서울대학교 출판부, 미적분학Ⅰ, pp. 72-73

감사의 글

제가 논문을 완성할 수 있도록 많은 가르침과 격려를 주신 정상태 교수님께 깊이 감사드립니다. 매주 제게 시간을 허락하여 주시고 도움주신 것을 잊지 않겠습니다. 그리고 바쁘신 와중에도 본 논문을 심사해주신 정해원 교수님과 이윤원 교수님께도 감사드립니다.

2003년부터 2년간의 교육대학원 생활은 제게 많은 가르침과 얻음을 주었습니다. 저와 함께 교육대학원을 다니신 선생님들과, 선배님, 동기, 후배들에게도 고마운 마음을 전합니다.

다시 한 번 이렇게까지 논문을 완성할 수 있도록 지도해주신 정상태 교수님께 감사드리며, 저에게 아낌없는 후원을 해주시고 사랑해주시는 부모님께도 깊은 감사를 드립니다.