教育學碩士學位請求論文

數値 積分에 關한 研究

A Study on Numerical Integration

仁荷大學校教育大學院

數 學 教 育 專 攻

宋 錫 纘

教育學碩士學位請求論文

數値 積分에 關한 硏究

A Study on Numerical Integration

1 9 8 2年 8月

指導敎授 : 金 泰 富 敎授

이 論文을 碩士學位 論文으로 提出함.

仁荷大學校敎育大學院

數 學 敎 育 專 攻

宋 錫 纘

P6.2.6

本 論文을 宋錫贊의 碩士學位 論文으로 認准함

1 9 8 2年 8月 日

主 審 金 永 俊

副 審 [illegible]

副 審 金 泰 富

謝　　　辭

本 論文을 作成함에 있어서 처음부터 끝까지 詳細하게 檢討 指導하여 주신 金泰富 敎授님께 深甚한 感謝의 말씀을 드리오며 아울러 助言해 주신 金永俊 敎授님과 吳尙煥 敎授님께 感謝를 드립니다.

1982年 7月 日

目　　次

I. 概　　要

自然科學과 人文社會科學에서는 積分으로 解決해야 할 많은 問題들이 惹起되고 있다. 被積分函數의 原始函數를 求할 수 없을 때는 被積分函數를 多項式으로 近似시킨 後 解를 求하는 境遇가 있을 수도 있고, 또는 函數의 값을 여러個 얻은後 그것을 基礎로 해서 解를 求할 수도 있다. 따라서 本 論文에서는 몇 가지의 演算子를 紹介하며 同時에 그 演算子들을 使用하여 被積分函數를 여러가지 多項式으로 近似시킨다.

그리고 近似시킨 여러 多項式들로 얻어지는 數值積分들을 比較研究하는데 本 研究의 目的을 둔다.

II. 여러가지 演算子

1. △ 演算子

a, h $a+h$, $a+2h$, $a+3h$,………에서 函數의 값

$f(a)$, $f(a+h)$, $f(a+2h)$…………들이 주어져 있다고 하자

一次 差分 演算子 △를

$\triangle f(x) = f(x+h) - f(x)$로 定義한다.

또, 高次 差分 演算子를

$$\triangle^2 f(x) = \triangle(\triangle f(x))$$

$$\triangle^3 f(x) = \triangle(\triangle^2 f(x))$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\triangle^n f(x) = \triangle(\triangle^{n-1} f(x))$$ 等으로 定義한다.

△演算子에 關한 性質을 定理로 要約하면 다음과 같다.

定理 II. 1. 1

1) $\triangle^n$ 은 線型 演算子이다

2) $\triangle^n f(x)$의 展開時의 係數는 $(1-x)^n$을 展開했을 때의 係數와 같다,

3) $\triangle^n x^k = \begin{cases} 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & k < n \text{ 일때} \\ n!\,h^n \cdots\cdots\cdots\cdots & k = n \text{ 일때} \end{cases}$

證 明

1) i) $n = 1$ 일때

$$\triangle(c_1 f(x) + c_2 g(x)) = \{c_1 f(x+h) + c_2 g(x+h)\} - \{c_1 f(x) + c_2 g(x)\}$$
$$= c_1\{f(x+h) - f(x)\} + c_2\{g(x+h) - g(x)\}$$
$$= c_1 \triangle f(x) + c_2 \triangle g(x)$$

로 되어 成立한다.

ii) $n-1$ 일때 成立한다고 假定하면

$$\triangle^n(c_1 f(x) + c_2 g(x)) = \triangle\{\triangle^{n-1}(c_1 f(x) + c_2 g(x))\}$$
$$= \triangle\{c_1 \triangle^{n-1} f(x) + c_2 \triangle^{n-1} g(x)\} \cdots\cdots$$ (假定에 依하여)
$$= c_1 \triangle(\triangle^{n-1} f(x)) + c_2 \triangle(\triangle^{n-1} g(x)) \cdots$$ (i 에 依하여)
$$= c_1 \triangle^n f(x) + c_2 \triangle^n g(x)$$ 로 되어

n 일 때도 成立한다.

따라서 1) 은 모든 自然數에 對하여 成立한다.

2) i) $\triangle f(x) = f(x+h) - f(x)$

ii) $\triangle^2 f(x) = \triangle f(x+h) - \triangle f(x) = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)$

iii) $\triangle^3 f(x) = f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x)$

一般的으로

$$\triangle^n f(x) = f(x+nh) - \binom{n}{1} f(x+(n-1)h) + \binom{n}{2} f(x+(n-2)h) + \cdots + (-1)^n f(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x+kh)$$

따라서, 係數는 $(1-x)^n$을 展開했을 때의 係數와 같다.

3) i) $n=1$일때

$\triangle x = (x+h) - x = h$

$\triangle 1 = 1-1 = 0$ 　따라서 $n=1$일때 成立한다.

ii) $n-1$일때

$$\triangle^{n-1} x^{k-1} = \begin{cases} 0 \cdots\cdots\cdots\cdots & k<n \text{ 일때} \\ (n-1)!\ h^{n-1} \cdots\cdots & k=n \text{ 일때,} \end{cases}$$ 成立한다고

假定하면

$$\triangle^{n} x^{k} = \triangle^{n-1}(\triangle x^{k}) = \triangle^{n-1}\{(x+h)^k - x^k\}$$

$$= \triangle^{n-1}\{\binom{k}{1} x^{k-1} h + \binom{k}{2} x^{k-2} h^2 + \cdots\cdots + h^k\}$$

$$= \begin{cases} 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & k<n \text{ 일때} \\ \binom{n}{1} h (n-1)!\ h^{n-1} \cdots\cdots & k=n \text{ 일때} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & h<n \text{ 일때} \\ n!\ h^{n} \cdots\cdots\cdots\cdots & k=n \text{ 일때} \end{cases}$$

따라서 모든 自然數 n에 對하여 3)은 成立한다.

2. E演算子

이후는 便宜上 $f(x)$를 fx로 나타내기로 하자.

移動演算子 E를

$Efx = fx+h$ 로 定義한다.

高次移動 演算子 E^n을 $E^n fx = E^{n-1}(Efx)$로 定義한다.

E演算子의 性質을 要約하면 다음 定理와 같다.

定 理 Ⅱ.2.1

1) E^n은 線型演算子이다.

2) $E^n = (1+\triangle)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \triangle^k$

證 明

1) i) $n=1$ 일때

$$E(c_1 fx + c_2 gx) = c_1 f_{x+h} + c_2 g_{x+h}$$
$$= c_1 Efx + c_2 Egx$$ 로 되어 成立한다.

ii) $n-1$ 일때 成立한다고 假定하면

$$E^n(c_1 fx + c_2 gx) = E\{E^{n-1}(c_1 fx + c_2 gx)\}$$
$$= E(c_1 E^{n-1} fx + c_2 E^{n-1} gx)$$
$$= c_1 E(E^{n-1} fx) + c_2 E(E^{n-1} gx)$$
$$= c_1 E^n fx + c_2 E^n gx$$

로 되어 n 일때도 成立한다.

i) ii)에 依해 E^n은 모든 自然數 n에 對하여 線型演算子이다.

2) fx를 任意의 函數라 하자

$$Efx = fx+h = fx + (fx+h - fx)$$
$$= fx + \triangle fx$$
$$= (1+\triangle) fx$$

따라서 $E = 1 + \triangle$

$$E^n = (1+\triangle)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \triangle^k$$ 인것은 쉽게 보일 수 있다.

※ Remark ; E^n의 展開式을 n이 自然數일때만 보였으나, $(1+x)^n$의 展開式과 같이 n가 實數일때도 展開할 수 있다.

fx를 △演算子를 使用하여 展開할 수 있다.

$$fx = E^x f_0 = (1+\triangle)^x f_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{x}{k} \triangle^k f_0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2-1)$$

式(2−1)을 Newton 前進差分公式이라고 한다.

다음은 差分表를 說明하자

$\triangle f_n = f_{n+1} - f_n$, $\triangle^2 f_n = \triangle f_{n+1} - \triangle f_n$ $\triangle^3 f_n = \triangle^2 f_{n+1} - \triangle^2 f_n$ $\cdots\cdots\cdots\cdots$ $\triangle^k f_n = \triangle^{k-1} f_{n+1} - \triangle^{k-1} f_n$ 를 求하여 만든 表를 差分表라 한다.

差 分 表

x	fx	$\triangle fx$	$\triangle^2 fx$	$\triangle^3 fx$	$\triangle^4 fx$	$\triangle^5 fx$
0	f_0					
		$\triangle f_0$				
1	f_1		$\triangle^2 f_0$			
		$\triangle f_1$		$\triangle^3 f_0$		
2	f_2		$\triangle^2 f_1$		$\triangle^4 f_0$	
		$\triangle f_2$		$\triangle^3 f_1$		$\triangle^5 f_0$
3	f_3		$\triangle^2 f_2$		$\triangle^4 f_1$	
		$\triangle f_3$		$\triangle^3 f_2$		
4	f_4		$\triangle^2 f_3$			
		$\triangle f_4$				
5	f_5					

(例 2. 1) $f_0 = -5, f_1 = 1, f_2 = 9, f_3 = 25, f_4 = 55, f_5 = 105$ 일때

差分表를 만들고 $f_{3,1}$ 을 求하라

解)

差 分 表

x	fx	$\triangle fx$	$\triangle^2 fx$	$\triangle^3 fx$	$\triangle^4 fx$
0	−5				
		6			
1	1		2		
		8		6	
2	9		8		0
		16		6	
3	25		14		0
		30		6	
4	55		20		
		50			
5	105				

Newton 의 前進差分 公式을 使用하면

$$fx = E^x fo = (1+\triangle)^x fo$$

$$= \{1 + x\triangle + \frac{x(x-1)}{2!}\triangle^2 + \frac{x(x+1)(x-2)}{3!}\triangle^3 + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{4!}\triangle^4 + \cdots\cdots\cdots\} fo$$

$$= -5 + x\cdot 6 + \frac{x(x-1)}{2}\cdot 2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{6}\cdot 6$$

$$= x^3 - 2x^2 + 7x - 5$$

$$\therefore f_{3,1} = (3,1)^3 - 2(3,1)^2 + 7(3,1) - 5 = 27,271$$

(例 2, 2) $fx = e^x$에 對應한 差分表를 만들고 fx 의 四次 近似多項式을

求하라 (但, fx 는 주어져 있다)

差 分 表

* x	* fx	$\triangle fx$	$\triangle^2 fx$	$\triangle^3 fx$	$\triangle^4 fx$
0	1.000				
		1.718			
1	2.718		2.953		
		4.671		5.073	
2	7.389		8.026		8.716
		12.697		13.789	
3	20.086		21.815		
		34.512			
4	54.598				

Newton의 前進差分公式을 使用하면

$$fx = E^x f_0 = (1+\triangle)^x f_0$$

$$= \{1 + x\triangle + \frac{x(x-1)}{2!}\triangle^2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{3!}\triangle^3 + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{4!}\triangle^4\} f_0$$

$$= 1 + x(1.718) + \frac{x(x-1)}{2}(2.953) + \frac{x(x-1)(x-2)}{6}(5.073) + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{24}$$

$$(8.716)$$

$$\therefore\ f(x) = 1 + x(1.718) + \frac{x(x-1)}{2}(2.953) + \frac{x(x-1)(x-2)}{6}(5.073)$$

$$\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{24}(8.716)$$

위 (列2.2)에서 求한 多項式으로 $f_{3.2} = e^{3.2}$를 求해 보면 $f_{3.2} = 1 + 5.4976 + 10.39456 + 7.142784 + 0.6136064 = 24.6485504$ 이다. 그런데 原函數에서는 $f_{3.2} = e^{3.2} = 24.53253$ 을 얻는다.

差分表에서 얻은 近似公式을 使用하여 求한 近似値와 函數直와의 誤差는 크다. 이 理由는 差分列이 發散하기 때문이다. 誤差를 줄이기 위하여 다른 演算子를 硏究하자.

3) $\triangle$ 演算子

$x=a, b, c, \cdots$에서 函數값 $fa, fb, fc, \cdots\cdots$들이 주어져 있다. 各 點사이에 間隔은 반드시 같을 必要는 없다.

b에서 fa의 除差分 $\underset{b}{\triangle} fa$를 $\underset{b}{\triangle} fa = \dfrac{fb - fa}{b-a}$로 定義한다.

高次 除差分은 $\underset{bc}{\triangle}^2 f_a = \dfrac{\underset{c}{\triangle} f_a - \underset{b}{\triangle} f_a}{c-a}$

$\underset{bcd}{\triangle}^3 f_a = \dfrac{\underset{cd}{\triangle}^2 f_b - \underset{bc}{\triangle}^2 f_a}{d-a}$ …… 등으로 定義한다.

演算子의 性質을 調査해 보자

定理 II . 3 . 1

$$\underset{bc\cdots ijk}{\triangle}^r f_a = \frac{f_a}{(a-b)(a-c)\cdots(a-j)(a-k)} + \frac{f_b}{(b-a)(b-c)\cdots(a-j)(a-k)} + \cdots\cdots + \frac{f_k}{(k-a)(k-b)\cdots\cdots(k-i)(k-j)}$$

證明

i) $r=1$일때

$\underset{b}{\triangle} f_a = \dfrac{f_b - f_a}{b-a} = \dfrac{f_a}{a-b} + \dfrac{f_b}{a-b}$ 로 되어 成立한다.

ii) $r-1$일때 成立한다고 假定하면

$$\underset{bc\cdots jk}{\triangle}^r f_a = \frac{\underset{c\cdots jk}{\triangle}^{r-1} f_b - \underset{bc\cdots j}{\triangle}^{r-1} f_a}{k-a}$$

$$= \frac{1}{k-a}\Big[\Big\{\frac{f_b}{(b-c)(b-d)\cdots(b-j)(b-k)} + \frac{f_c}{(c-b)(c-d)\cdots(c-j)(c-k)} + \frac{f_k}{(k-b)(k-c)\cdots(k-j)}\Big\} - \Big\{\frac{f_a}{(a-b)(a-c)\cdots(a-j)} + \frac{f_b}{(b-a)(b-c)\cdots(b-j)} + \cdots + \frac{f_j}{(j-a)(j-b)\cdots(j-i)}\Big\}\Big]$$

여기에서 f_b에 關하여 調査하면,

$$\frac{1}{k-a}\left\{\frac{f_b}{(b-c)(b-d)\cdots(b-j)(b-k)}-\frac{f_b}{(b-a)(b-c)\cdots(b-j)}\right\}$$

$$=\frac{1}{k-a}\;\frac{(b-a)fb-(b-k)fb}{(b-a)(b-c)\cdots(b-j)(b-k)}=\frac{fb}{(b-a)(b-c)\cdots(b-j)(b-k)}$$

$f_a, f_c, \cdots\cdots\cdots f_k$ 에 對하여 같은 方法으로 調査하면,

$$\mathop{\triangle^{r}}_{bc\cdots jk} f_a=\frac{f_a}{(a-b)(a-c)\cdots(a-j)(a-k)}+\frac{f_b}{(b-a)(b-c)\cdots(b-j)(b-k)}+\cdots\cdots$$

$$+\frac{f_k}{(k-a)(k-b)\cdots(k-i)(k-j)}$$ 로 되어 r 일때도 成立한다.

i) ii) 에 依하여 모든 自然數 r 에 對하여 成立한다.

다음의 表를 除差分表라 한다.

除 差 分 表

x	f_x	$\triangle f_x$	$\triangle^2 f_x$	$\triangle^3 f_x$
a	f_a			
		$\mathop{\triangle}_{b} f_a$		
b	f_b		$\mathop{\triangle^2}_{bc} f_a$	
		$\mathop{\triangle}_{c} f_b$		$\mathop{\triangle^3}_{bcd} f_a$
c	f_b		$\mathop{\triangle^2}_{cd} f_b$	
		$\mathop{\triangle}_{d} f_c$		
d	f_d			

定理 II . 3 . 2 .

$\mathop{\triangle^{n}}_{a,b\cdots jk}$ 는 線型 演算子이다.

證明

定理 II. 3 . 1 을 使用하면 쉽게 證明된다.

$$\mathop{\triangle^{n}}_{ab\cdots ck}(c_1f+c_2g)x=\frac{(c_1f+c_2g)x}{(x-a)(x-b)\cdots(x-j)(x-k)}$$

$$+\frac{(c_1f+c_2g)_a}{(a-x)(a-b)\cdots(a-j)(a-k)}+\cdots+\frac{(c_1f+c_2g)_k}{(k-x)(k-a)\cdots(k-i)(k-j)}+\cdots\cdots$$

$$=\left\{\frac{c_1f_x}{(x-a)(x-b)\cdots\cdots(x-j)(x-k)}+\frac{c_1f_a}{(a-x)(a-b)\cdots(a-j)(a-k)}\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{c_1f_k}{(k-x)(k-a)\cdots(k-i)(k-j)}\right\}+\left\{\frac{c_2g_k}{(x-a)(x-b)\cdots(x-j)(x-k)}\right.$$

$$\left.+\frac{c_2g_a}{(a-x)(a-b)\cdots(a-j)(a-k)}+\cdots\cdots+\frac{c_2g_k}{(k-x)(k-a)\cdots(k-i)(k-j)}\right\}$$

$$=c_1\mathop{\triangle}_{ab\cdots jk}^{n}f_x+c_2\mathop{\triangle}_{ab\cdots jk}^{n}g_x$$

따라서 위 定理는 成立한다.

定理Ⅱ.3.3.

$\mathop{\triangle}_{bc\cdots jk}^{n}f_a$ 는 對稱性質을 갖는다.

卽, $a, b, c\cdots j,k$ 의 順列에 無關하다.

證明

定理Ⅱ.3.1을 使用하면

$$\mathop{\triangle}_{bc\cdots jk}^{n}f_a=\frac{f_a}{(a-b)(a-c)\cdots(a-j)(a-k)}+\frac{f_b}{(b-a)(b-c)\cdots(b-j)(b-k)}+\cdots$$

$$+\frac{f_k}{(k-a)(k-b)\cdots(k-i)(k-j)}$$ 이다.

이것은 $a.b.c\cdots\cdots j.k$ 의 順列에는 關係가 없으므로 위 定理는 成立한다.

定理Ⅱ.3.4

f_x 가 常數이면 $\mathop{\triangle}_{ab\cdots jk}^{n}f_x=0$ 이다.

證明

$$\mathop{\triangle}_{ac\cdots jk}^{n}f_x=f_x\cdot\mathop{\triangle}_{ab\cdots jk}^{n}1_x=f_x\cdot\frac{\mathop{\triangle}_{b\cdots jk}^{n-1}1_a-\mathop{\triangle}_{ab\cdots j}^{n-1}1_x}{k-x}.$$

$$= f_x \cdot \frac{\underset{b\cdots ja}{\triangle}^{n-1} f_k - \underset{ab\cdots j}{\triangle}^{n-1} 1_x}{k - x}$$

$$= f_x \cdot \frac{0}{k - x} = 0$$

定理Ⅱ.3.5

P_x 가 n 次 多項式이면,

$\underset{a}{\triangle} P_x$ 는 $n-1$ 次의 多項式,

$\underset{ab}{\triangle}^2 P_x$ 는 $n-2$ 次의 多項式,

$\underset{ab\cdots jk}{\triangle}^n P_x$ 는 常數이다.

證明

$\triangle^n$ 는 線型演算子이므로 $P_x = x^n$ 일때만 證明하면 充分하다.

i) $r = 1$ 일때

$$\underset{a}{\triangle}_x n = \frac{a^n - x^n}{a - x} = x^{n-1} + ax^{n-2} + \cdots\cdots + a^{n-2}x + a^{n-1}$$

로 되어 成立한다.

ii) r 일때 成立한다고 假定하면,

$$\underset{ab\cdots j}{\triangle}^r x^n = a_0 x^{n-r} + a_1 x^{n-r-1} + \cdots\cdots + a_{n-r-1}x + a_{n-r} \text{ 이다.}$$

$$\underset{ab\cdots jk}{\triangle}^{r+1} x^n \quad \frac{\underset{b\cdots jk}{\triangle}^r a^n}{k} - \frac{\underset{ab\cdots j}{\triangle}^r x^n}{x} = \frac{\underset{ab\cdots j}{\triangle}^r k^n}{k} - \frac{\underset{ab\cdots j}{\triangle}^r x^n}{x}$$

이 式의 分子는 假定에 依하여 $(n-r)$ 次의 多項式이며 $(k-x)$ 라는 因數를 갖는다. 따라서 $\underset{ab\cdots jk}{\triangle}^{r+1} x^n$ 는 $(n-r-1)$ 次의 多項式이 되므로 위 定理는 成立한다.

定理Ⅱ. 3. 6

$b-a = c-b = \cdots\cdots = j-i = k-j = h(>0)$ 이면

$\underset{bc\cdots jk}{\triangle}^{r} f_a = \triangle^{r} f_a / r! h^{r}$ 이다.

證明

i) $r=1$ 일때

$\underset{b}{\triangle} f_a = \dfrac{f_b - f_a}{b-a} = \dfrac{\triangle f_a}{h} = \dfrac{\triangle f_a}{1!\, h!}$ 로 되어 成立한다.

ii) $r-1$ 일때 成立한다고 假定하면

$$\underset{bc\cdots jk}{\triangle}^{r} f_a = \frac{\underset{c\cdots ik}{\triangle}^{r-1} f_b - \underset{bc\cdots j}{\triangle}^{r-1} f_a}{k-a} = \frac{\dfrac{\triangle^{r-1} f_b}{(r-1)!\, h^{r-1}} - \dfrac{\triangle^{r-1} f_a}{(r-1)!\, h^{r-1}}}{rh}$$

$= \dfrac{\triangle^{r} f_a}{r!\, h^{r}}$ 로 되어 r 일때도 成立한다. 그래서 위 定理는 成立한다.

위에서 論한 定理들을 使用하여 f_x 를 展開하여 보자.

a. b. c …… j. k 를 數直線上의 點이라 하자.

$\underset{a}{\triangle} f_x = \dfrac{f_a - f_x}{a-x}$ $\quad\therefore\quad f_x = f_a + (x-a)\underset{a}{\triangle} f_x$

그런데, $\underset{ab}{\triangle}^{2} f_x = \dfrac{\underset{b}{\triangle} f_a - \underset{a}{\triangle} f_x}{b-x} = \dfrac{\underset{a}{\triangle} f_x - \underset{b}{\triangle} f_a}{x-b}$ 이다.

따라서, $f_x = f_a + (x-a)\underset{b}{\triangle} f_a + (x-a)(x-b)\underset{ab}{\triangle}^{2} f_x$

또, $\underset{abc}{\triangle}^{3} f_x = \dfrac{\underset{bc}{\triangle}^{2} f_a - \underset{ab}{\triangle}^{2} f_x}{c-x}$

그래서 $f_x = f_a + (x-a)\underset{b}{\triangle} f_a + (x-a)(x-b)\underset{bc}{\triangle}^{2} f_a + (x-a)(x-c)\underset{abc}{\triangle}^{3} f_x$

이 方法을 繼續하여 展開式을 얻을 수 있다.

$A = x - a \quad B = x - b \quad C = x - c \quad D = x - d \cdots\cdots$ 라 定義하면

$f_x = f_a + A \underset{b}{\Delta} f_a + AB \underset{bc}{\Delta^2} f_a + ABC \underset{bcd}{\Delta^3} f_a + \cdots\cdots$ 로 된다.

이것을 Newton 除差分公式이라 한다.

또 다른 展開方法인 Sheppard의 法則을 硏究하자. 函數 f_x 를 다음과 이 展開할 수 있다.

除差分表 (page 10 참조)에서 f_x 의 어떤값 假令 f_c 를 擇한다. f_c 에서 右則隣接 上.下로 前進하여 둘중 한값 假令 $\underset{c}{\Delta} f_b$ 를 擇한다고 하자. 그곳에서 上記方法을 되풀이 하여 두개중 $\underset{bc}{\Delta^2} f_a$ 를 擇한다.

이곳에서 또 右則隣接 上.下로 前進하면, $\underset{bcd}{\Delta^3} f_a$ 밖에 없으므로 이것을 擇한다. 이 進路를 表示하면,

$$f_c \rightarrow \underset{c}{\Delta} f_b \rightarrow \underset{bc}{\Delta^2} f_a \rightarrow \underset{bcd}{\Delta^3} f_a$$

이 때 文字가 나타난 順序는 $c . a . b . d$ 順이다.

이 進路에 따라서 展開하면

$$f_x = f_c + (x-c) \underset{c}{\Delta} f_a + (x-c)(x-b) \underset{bc}{\Delta^2} f_a + (x-c)(x-b)(x-d) \underset{bcd}{\Delta^3} f_a$$

로 된다. 이 方法을 Sheppard의 法則이라 한다.

例3.1) tan x의 除差分表를 만들고 tan 31°를 求하라.

(但, 表의 x값과 tan x값은 주어져 있다.)

(解)

除 差 分 表

	x °	x radian	fx	Δfx	$\Delta^2 fx$	$\Delta^3 fx$
a	30°	0.5236	0.5774			
				1.3333		
b	30°30'	0.5323	0.5890		1.0573	
				1.3702		-26.4818
c	32°	0.5585	0.6249		0.0404	
				1.3714		
d	32° 12'	0.5620	0.6297			

$b-a=0.0087$ $\quad c-b=0.0262$

$c-a=0.0349$ $\quad d-b=0.0297$ $\quad 31°=0.5411$ radian

$d-a=0.0384$ $\quad d-c=0.0035$

$$fx=fa+(x-a)\underset{b}{\Delta}fa+(x-a)(x-b)\underset{bc}{\Delta^2}fa+(x-a)(x-b)(x-c)\underset{bcd}{\Delta^3}fa$$

$$\begin{aligned}f_{0.5411} &= 0.5774+(0.5411-0.5236)1.3333+(0.5411-0.5236)(0.5411-0.5323)1.0573+(0.5411-0.5236)(0.5411-0.5323)(0.5411-0.5585)(-26.4818)\\ &= 0.5774+0.0233+0.000163+0.00007096\\ &= 0.60093\end{aligned}$$

tan 31°의 近似값은 0.60093 이다.

※ 參考 正確한 tan 31° = 0.60092586이다.

따라서 近似값은 小數点 以下 4자리까지는 正確하다는 것을 알수 있다.

4. δ, μ 演算子

$x = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots$ 에서 函数값들이 각각 주어져 있다고 하자.

1) 中央差分 演算子 δ

$\delta = E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}}$ 로 定義하면 δ 는 다음의 性質을 갖는다.

定理 Ⅱ. 4.1

(1) $\delta E^{\frac{1}{2}} = E - 1 = \triangle$

(2)
$$\begin{cases} \triangle f_{-2} = \delta E^{\frac{1}{2}} f_{-2} = \delta f_{-\frac{3}{2}} \\ \triangle f_{-1} = \delta E^{\frac{1}{2}} f_{-1} = \delta f_{-\frac{1}{2}} \\ \triangle f_{0} = \delta E^{\frac{1}{2}} f_{0} = \delta f_{\frac{1}{2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} \triangle^2 f_{-2} = \delta^2 E f_{-2} = \delta^2 f_{-1} \\ \triangle^2 f_{-1} = \delta^2 E f_{-1} = \delta^2 f_{0} \\ \triangle^2 f_{0} = \delta^2 E f_{0} = \delta^2 f_{1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \triangle^3 f_{-2} = \delta^3 E^{\frac{3}{2}} f_{-2} = \delta^3 f_{-\frac{1}{2}} \\ \triangle^3 f_{-1} = \delta^3 E^{\frac{3}{2}} f_{-1} = \delta^3 f_{\frac{1}{2}} \\ \triangle^3 f_{0} = \delta^3 E^{\frac{3}{2}} f_{0} = \delta^3 f_{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

다음의 表를 中央 差分表라 한다.

中 央 差 分 表

x	f_x	δf_x	$\delta^2 f_x$	$\delta^3 f_x$	$\delta^4 f_x$
-2	f_{-2}				
		$\delta f_{-\frac{3}{2}}$			
-1	f_{-1}		$\delta^2 f_{-1}$		
		$\delta f_{-\frac{1}{2}}$		$\delta^3 f_{-\frac{1}{2}}$	
0	f_0		$\delta^2 f_0$		$\delta^4 f_0$
		$\delta f_{\frac{1}{2}}$		$\delta^3 f_{\frac{1}{2}}$	
1	f_1		$\delta^2 f_1$		
		$\delta f_{\frac{3}{2}}$			
2	f_2				

2) 平均 演算子 μ

$\mu = \frac{1}{2}\left(E^{\frac{1}{2}} + E^{-\frac{1}{2}} \right)$로 定義 한다.

$\triangle$, E, δ μ의 相互関開는 다음과 같다.

(1) $\mu^2 = 1 + \frac{\delta^2}{4}$

(2) $\mu\delta = \frac{1}{2}\triangle + \frac{1}{2}\triangle E^{-1}$

Ⅲ. 函數의 多項式으로의 近似式

$x=0, 1, 2, 3 \cdots$ 에서 函数값이 주어져 있을때,

fx의 近似多項式

$$fx = f_0 + x\Delta f_0 + \frac{x(x-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{x(x-1)(x-2)}{3!}\Delta^3 f_0 + \cdots \quad (3-1)$$을

Newton 前進 差分 公式이라고 한다.

$x = a, b, c \cdots$에서 函数값이 주어져 있을때, fx 의 近似式

$$fx = f_a + (x-a)\underset{b}{\Delta} f_a + (x-a)(x-b)\underset{bc}{\Delta^2} f_a + (x-a)(x-b)(x-c)\underset{bcd}{\Delta^3} f_a + \cdots \quad (3-2)$$ 을

New ton 除差分 公式 이라고 한다.

区間幅이 모두 1이면 $\underset{bc\cdots jk}{\Delta^r} f_a = \dfrac{\Delta^r f_a}{r!}$ 이므로 式(3-2)는

$$f(x) = fa + (x-a)\Delta fa + \frac{(x-a)(x-b)}{2!}\Delta^2 fa + \frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{3!}\Delta^3 f_a + \cdots$$ 로 된다.

除差分表와 差分表를 同時에 나타내면 다음과 같다.

除 差 分 表 , 差 分 表

x	fx	$\underset{}{\Delta} fx \quad \Delta fx$	$\underset{}{\Delta}^2 fx \quad \Delta^2 fx$	$\underset{}{\Delta}^3 fx \quad \Delta^3 fx$	$\underset{}{\Delta}^4 fx \quad \Delta^4 fx$
$a=-3$	$f_a = f_{-3}$				
		$\underset{b}{\Delta} f_a \quad \Delta f_a$			
$b=-2$	$f_b = f_{-2}$		$\underset{bc}{\Delta}^2 f_a \quad \Delta f_a$		
		$\underset{c}{\Delta} f_b \quad \Delta f_b$		$\underset{bcd}{\Delta}^3 f_a \quad \Delta^3 f_a$	
$c=-1$	$f_c = f_{-1}$		$\underset{cd}{\Delta}^2 f_b \quad \Delta f_b$		$\underset{bcde}{\Delta}^4 f_a \quad \Delta^4 f_a$
		$\underset{d}{\Delta} f_c \quad \Delta f_c$		$\underset{cde}{\Delta}^3 f_b \quad \Delta^3 f_b$	
$d=0$	$f_d = f_0$		$\underset{de}{\Delta}^2 f_c \quad \Delta f_c$		$\underset{cdef}{\Delta}^4 f_b \quad \Delta^4 f_b$
		$\underset{e}{\Delta} f_d \quad \Delta f_d$		$\underset{def}{\Delta}^3 f_c \quad \Delta^3 f_c$	
$e=1$	$f_e = f_1$		$\underset{ef}{\Delta}^2 f_d \quad \Delta f_d$		$\underset{defg}{\Delta}^4 f_c \quad \Delta^4 f_c$
		$\underset{f}{\Delta} f_e \quad \Delta f_e$		$\underset{efg}{\Delta}^3 f_d \quad \Delta^3 f_d$	
$f=2$	$f_f = f_2$		$\underset{fg}{\Delta}^2 f_e \quad \Delta f_e$		
		$\underset{g}{\Delta} f_f \quad \Delta f_f$			
$g=3$	$f_g = f_3$				

差分表에서 實線을 따라 Sheppard의 法則을 使用하여 fx 를 展開하여 보자.

文字가 나타나는 順序는 $d, e, c, f \cdots$이다. 따라서, 展開式은

$$fx = f_0 + x\triangle f_0 + \frac{x(x-1)}{2!}\triangle^2 f_{-1} + \frac{x(x-1)(x+1)}{3!}\triangle^3 f_{-1} + \cdots$$

$$\therefore\ fx = f_0 + \binom{x}{1}\triangle f_0 + \binom{x}{2}\triangle^2 f_{-1} + \binom{x+1}{3}\triangle^3 f_{-1} + \cdots \quad (3-4)$$

(3-4)를 Gauss 前進公式이라 한다.

또, 差分表에서 點線을 따라 Sheppard의 法則을 使用하면 文字가 나타나는 順序는 $d, c, e, b \cdots$이다.

따라서, $fx = f_0 + x\triangle f_{-1} + \frac{x(x+1)}{2!}\triangle^2 f_{-1} + \frac{x(x+1)(x-1)}{3!}\triangle^3 f_{-2} + \cdots$

$$\therefore\ fx = f_0 + \binom{x}{1}\triangle f_{-1} + \binom{x+1}{2}\triangle^2 f_{-1} + \binom{x+1}{3}\triangle^3 f_{-2} + \cdots \quad (3-5)$$

(3-5)를 Gauss 後進 公式이라고 한다.

그런데, $\delta E^{\frac{1}{2}} = \triangle$ 이므로 式 (3-4)와 (3-5)는 다음과 같이 變形된다.

$$fx = f_0 + \binom{x}{1}\delta f_{\frac{1}{2}} + \binom{x}{2}\delta^2 f_0 + \binom{x+1}{3}\delta^3 f_{\frac{1}{2}} + \binom{x+1}{4} f_0 + \cdots \quad (3-4)'$$

$$fx = f_0 + \binom{x}{1}\delta f_{-\frac{1}{2}} + \binom{x+1}{2}\delta^2 f_0 + \binom{x+1}{3}\delta^3 f_{-\frac{1}{2}} + \binom{x+2}{4}\delta^4 f_0 + \cdots \quad (3-5)'$$

(3-4)'와 (3-5)'를 合하고 2로 나누면

$$fx = f_0 + \frac{x}{1!}\delta\mu f_0 + \frac{x^2}{2!}\delta^3\mu f_0 + \frac{x^2(x^2-1)}{4!}\delta^4 f_0 + \cdots \quad (3-6)$$

(3-6)을 Stirling의 公式이라 한다.

差分表에서 $f_1 \to \triangle f_0 \to \triangle^2 f_0 \to \triangle^3 f_{-1} \to \triangle^4 f_{-1}$ 에 따라

Sheppard의 法則을 使用하여 f_x를 展開하여 보자

文字가 나타나는 順序는 e, d, f, c …이다. 故로

$$f_x = f_1 + (x-1)\triangle f_0 + \frac{(x-1)x}{2!}\triangle^2 f_0 + \frac{(x-1)x(x-2)}{3!}\triangle^3 f_{-1} + \frac{(x-1)x(x-2)(x+1)}{4!}\triangle^4 f_1 + \cdots \quad (3-7)$$

$\delta E^{\frac{1}{2}} = \triangle$를 사용하면

$$f_x = f_1 + (x-1)\ \delta f_{\frac{1}{2}} + \binom{x}{2}\delta^2 f_1 + \binom{x}{3}\delta^3 f_{\frac{1}{2}} + \binom{x+1}{4}\delta^4 f_1 + \cdots$$

$\cdots (3-7)'$

$(3-4)'$와 $(3-7)'$을 合하는 2로 나누면

$$f_x = \mu f_{\frac{1}{2}} + \left(x-\tfrac{1}{2}\right)\delta f_{\frac{1}{2}} + \binom{x}{2}\delta^2 \mu f_{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{3}\left(x-\tfrac{1}{2}\right)\binom{x}{2}\delta^3 f_{\frac{1}{2}} + \binom{x+1}{4}\delta^4 \mu f_{\frac{1}{2}} + \cdots \quad (3-8)$$

$(3-8)$을 Bessel의 公式이라 한다.

IV. 函數의 數値積分

定積分 $\int_b^a fx\,dx$ 를 計算하려면 不定積分을 求해야만 그 값을 求할 수 있다. 數値 解析的으로는 fx 를 多項式으로 近似시키고 난 후, 積分하여 近似값을 求한다.

fx 를 Taylor 級數로 展開했을 때는 그 級數가 積分區間에서 發散하거나, 또는 級數의 收斂速度가 매우 느린 境遇도 있다. 이를 避하기 위하여 被積分函數를 다른 方法으로 展開하여 積分을 試圖한다. 이제 函數 fx 를 여러 가지 多項式으로 近似시키고 數値積分 方法을 硏究하겠다.

定理 4.1 : 區間幅 $h = 1$ 이고 fx 가 1次 多項式이면

$$\int_0^1 fx\,dx = \frac{1}{2}(f_0 + f_1) \qquad \cdots\cdots (4\text{-}1)$$

證明

$$fx = E^x f_0 = (1+\triangle)^x f_0 = \{1+\binom{x}{1}\triangle+\binom{x}{2}\triangle^2+\cdots\}f_0 = f_0 + x\triangle f_0$$

$$\therefore \int_0^1 fxdx = f_0 + \frac{1}{2}\triangle f_0 = f_0 + \frac{1}{2}(f_1 - f_0) = \frac{1}{2}(f_0 + f_1)$$

定理 4.2 : 區間幅 $h = 1$ 이고 fx 가 2次 多項式이면

$$\int_0^2 fxdx = \frac{1}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) \qquad \cdots\cdots (4\text{-}2)$$

證明 $$fx = E^x f_0 = (1+\triangle)^x f_0 = \{1+\binom{x}{1}\triangle+\binom{x}{2}\triangle^2+\binom{x}{3}\triangle^3+\cdots\}f_0$$

$$= f_0 + x\triangle f_0 + \frac{x(x+1)}{2}\triangle^2 f_0$$

$$\therefore \int_0^2 fx dx = 2f_0 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0 \Delta f_0 + \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^2 \Delta^2 f_0$$

$$= \frac{1}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)$$

定理 4.3 : 區間幅 $h = 1$ 이고 fx 가 3 次 多項式이면

$$\int_0^3 fx dx = \frac{3}{8}(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4-3)$$

定理 4.4 : 區間幅 $h = 1$ 이고 f_x 가 4 次 多項式이면

$$\int_0^4 fx dx = \frac{2}{45}\{7f_4 + 32f_3 + 12f_2 + 32f_1 + 7f_0\} \cdots\cdots (4-4)$$

위의 두 定理도 같은 要領으로 證明된다.

萬若 區間幅 $h \neq 1$ 이면 變數 變換($xh = X$)에 依하여 區間幅이 1 인 境遇로 된다.

위의 定理들은 各各 (4 - 1)은 사다리꼴 法則, (4 - 2)는 Simpson 의 法則, (4 - 3)은 Simpson 의 $\frac{3}{8}$ 法則이라 한다.

많은 境遇는 fx 를 4 次 以上의 多項式으로 近似시키면, 大端히 複雜하다.

그래서, 보다 더 規則的이고, 有用性이 있도록 하기 위하여 여러 가지 方法을 硏究해 보자.

fx 가 6 次의 多項式이면 Stirling 의 公式에 依하여

$$fx = f_0 + \frac{x}{1!}\delta\mu f_0 + \frac{x^2}{2!}\delta^2 f_0 + \frac{x(x^2-1)}{3!}\delta^3\mu f_0 + \frac{x^2(x^2-1)}{4!}\delta^4 f_0$$

$$+ \frac{x(x^2-1)(x^2-2^2)}{5!}\delta^4\mu f_0 + \frac{x^2(x^2-1)(x^2-2^2)}{6!}\delta^6 f_0$$ 이다.

그러면, $\int_{-3}^{3} fxdx = 6f_0 + \frac{2 \cdot 3^2}{3!}\delta^2 f_0 + \frac{33}{10}\delta^4 f_0 + \frac{41^*}{140}\delta^6 f_0$

로 된다. 이때 41* 을 42로 바꾸면, $\frac{1}{140}\delta^4 f_0$의 誤差가 나타나지만 윗 式은 다음과 같이 簡單히 된다.

$$\int_{-3}^{3} fxdx = \frac{3}{10}(20f_0 + 30\delta^2 f_0 + 11\delta^4 f_0 + \delta^6 f_0)$$

$\delta = E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}}$ 을 윗 式에 代入하여 整理하면

$\int_{-3}^{3} fxdx = \frac{3}{10}\{6f_0 + (f_1 + f_{-1}) + 5(f_2 + f_{-2}) + (f_3 + f_{-3})\}$ 로 된다.

다시 右側으로 3單位 移動하면

$\int_{0}^{6} fxdx = \frac{3}{10}\{6f_3 + (f_4 + f_2) + 5(f_5 + f_1) + (f_6 + f_0)\}$ 로 되어

다음 整理가 얻어진다.

定理 4.5 : 區間幅 $h = 1$ 이고, fx 가 6次 多項式이면

$$\int_{0}^{6} fxdx = \frac{3}{10}\{6f_3 + (f_4 + f_2) + 5(f_5 + f_1) + (f_6 + f_0)\} \cdots\cdots (4-5)$$

다음은 Bessel 의 公式을 使用한 近似積分을 硏究해 보자

$$fx = \mu f_{\frac{1}{2}} + (x - \tfrac{1}{2})\delta f_{\frac{1}{2}} + \binom{x}{2}\delta^2 \mu f_{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{3}(x - \tfrac{1}{2})\binom{x}{2}\delta^3 f_{\frac{1}{2}}$$
$$\binom{x+1}{4}\delta^4 \mu f_{\frac{1}{2}} + \cdots\cdots$$

에서 $z = x - \frac{1}{2}$라 하면

$$fz = \mu f_{\frac{1}{2}} + z\delta f_{\frac{1}{2}} + \frac{(z^2 - \frac{1}{4})}{2!}\delta^2 \mu f_{\frac{1}{2}} + \frac{z(z^2 - \frac{1}{4})}{3!}\delta^3 f_{\frac{1}{2}} +$$
$$+ \frac{(z^2 - \frac{1}{4})(z^2 - \frac{9}{4})}{4!}\delta^4 \mu f_{\frac{1}{2}} + \frac{z(z^2 - \frac{1}{4})(z^2 - \frac{9}{4})}{5!}\delta^5 f_{\frac{1}{2}} + \cdots\cdots\cdots$$

따라서, $\int_0^1 fxdx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} fzdz \fallingdotseq (\mu - \frac{1}{12}\mu\delta^2 + \frac{11}{720}\mu\delta^4) f_{\frac{1}{2}}$

그런데, $\mu f_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(f_0 + f_1)$ 따라서

$\int_0^1 fxdx = \frac{1}{2}\{(f_0 + f_1) - \frac{1}{12}(\delta^2 f_0 + \delta^2 f_1) + \frac{11}{720}(\delta^4 f_0 + \delta^4 f_1)\}$로 되어 다음 定理를 얻는다.

定理 4.6 : fx를 Bessel 公式을 使用하여 積分시키면

$$\int_0^1 fxdx = \frac{1}{2}\{(f_0+f_1) - \frac{1}{12}(\delta^2 f_0 + \delta^2 f_1) + \frac{11}{720}(\delta^4 f_0 + \delta^4 f_1)\} \cdots (4-6)$$

또, $\int_0^h fzdz$를 考察하여 보자

$z = hx$라 하면 $dz = hdx$로 되어

$$\int_0^h fzdz = h\int_0^1 fxdx = \frac{h}{2}\{(f_h + f_0) - \frac{1}{12}(\delta^2 f_h + \delta^2 f_0) + \frac{11}{720}(\delta^4 f_h + \delta^4 f_0)\}$$

이때 $f_h = f_1$라 하면

$$\int_0^h fxdx = \frac{h}{2}\{(f_1 + h_0) - \frac{1}{12}(\delta^2 f_1 + \delta^2 f_0) + \frac{11}{720}(\delta^4 f_1 + \delta^4 f_0)\} \cdots (4-6)^1$$

n個의 區間에 $(4-6)^1$를 適用하면

$$\int_0^{nh} fxdx = \frac{h}{2}[\{f_0 + 2(f_1 + f_2 + \cdots\cdots + f_{n-1}) + f_n\} - \frac{1}{12}\{\delta^2 f_0 + 2(\delta^2 f_1 + \delta^2 f_2 + \cdots\cdots + \delta^2 f_{n-1}) + \delta^2 f_n\} + \frac{11}{720}\{\delta^4 f_0 + 2(\delta^4 f_1 + \delta^4 f^2 \cdots\cdots + \delta^4 f_{n-1}) + \delta^4 f_n\}]$$

그런데, $\delta^2 f_0 + 2(\delta^2 f_1 + \delta^2 f_2 + \cdots\cdots + \delta^2 f_{n-1}) + \delta^2 f_n = (E^n - 1)\, 2\mu\delta f_0$

이므로

$$\int_0^{nh} fx\,dx = \frac{h}{2}\left[\{f_0 + 2(f_1 + f_2 + \cdots\cdots + f_{n-1}) + f_n\} - \frac{1}{6}\mu\delta(f_n - f_0) + \frac{11}{360}\mu\delta^3(f_n - f_0)\right]$$ 로 되어

다음 定理가 얻어진다.

定理 4.7 : fx 를 n 個의 區間에서 Bessel 의 公式을 使用하여 積分하면

$$\int_0^{nh} fx\,dx = \frac{h}{2}\left[\{f_0 + 2(f_1 + f_2 + \cdots\cdots + f_{n-1}\} - \frac{1}{6}\mu\delta(f_n - f_0) + \frac{11}{360}\mu\delta^3(f_n - f_0)\right]$$

다음은 電算機에 使用되는 Romberg 積分에 對하여 考察하여 보자

$\int_b^a fx\,dx$ 의 近似公式은 사다리꼴 法則을 使用하면 $\frac{h}{2}(f_a + f_b)$ 가 된다.

(但, $h = b - a$)

또 다른 近似公式은 $hf(a + \frac{h}{2})$ 로 된다.

이 두개의 公式을 $[a, b]$ 의 2^n 區間에 反復適用한 것을 連續 사다리꼴의 法則이라 한다.

$$h_n = \frac{b-a}{2^n}$$

$$V_0 = h_0 f\left(a + \frac{h_0}{2}\right)$$

$$S_0^0 = \frac{h_0}{2}(fa + fb)$$

$$V_{n-1} = h_{n-1} \sum_{i=1}^{2^{n-1}} f\{a+(i-\tfrac{1}{2})h_{n-1}\}$$

$S_n^0 = \frac{1}{2}(S_{n-1}^0 + V_{n-1})$라 하여 求한 數列 $\{S_n^0\}$는 $\lim_{n\to\infty} S_n^0$

$= \int_a^b f(x)dx$가 된다.

또 S_0^0, S_1^0, S_2^0, ……, S_n^0가 決定되었을 때

$$S_n^j = \frac{2^{2j} S_{n+1}^{j-1} - S_n^{j-1}}{2^{2j} - 1}$$ 에 依하여 S_0^n를 計算한다.

그러면 數列 $\{S_0^n\}$는 $\int_a^b f(x)dx$에 收斂한다.

이것을 要約하면 다음과 같다.

定理 4.8 : $h_n = \dfrac{b-a}{2^n}$

$$V_0 = h_0 f(a + \frac{h_0}{2})$$

$$S_0^0 = \frac{h_0}{2}(fa + fb)$$

$$V_{n-1} = h_{n-1} \sum_{i=1}^{2^{n-1}} f\{a+(i-\tfrac{1}{2})h_{n-1}\}$$

$$S_n^0 = \frac{1}{2}(S_{n-1}^0 + V_{n-1})$$

에 의거 S_0^0, S_1^0, …… S_k^0을 求하고

$$S_n^j = \frac{2^{2j} S_{n+1}^{j-1} - S_n^{j-1}}{2^{2j} - 1}$$ 但, $j = 1$ 일때 $n = 0, 1, 2, \cdots\cdots k-1$
$j = 2$ 일때 $n = 0, 1, 2, \cdots\cdots k-2$
$\vdots$
$j = k$ 일때 $n = 0$

에 依해 數列 $\{S_0^k\}$을 求한다.

그러면 이 數列은 收檢하고 $\lim_{k\to\infty} S_0^k = \int_a^b fxdx$ 이다.

※ 定理 4.8을 Romberg 積分이라고 한다.

只今까지 어떤 函數가 分明한 形態를 갖지 않더라도 몇個의 函數값만 주어져 있으면 그것을 基礎로 하여 그 값에 一致하는 多項式을 求하여 數値積分을 求하는 方法과, 積分區間을 같은 間隔으로 細分하여 反復에 依하여 積分을 求하는 方法을 硏究하였다. 只今까지 硏究한 方法을 楕圓積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2 t}\, dt$ 에 適用해 보자

(列 4.1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2 t}\, dt$ 를 여러가지 方法으로 求하고 比較하라

(解) 區間을 六等分하고 差分表를 만든다.

$$h = \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.2618, \quad ft = \sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2 t}$$

差 分 表

順 序	t	f_t	$\triangle f_t$
−1	−0.2618	0.9916	
			0.0084
0	0	1	
			−0.0084
1	0.2618	0.9916	
			−0.0234
2	0.5236	0.9682	
			−0.0328
3	0.7854	0.9354	
			−0.0340
4	1.0472	0.9014	
			−0.0260
5	1.3090	0.8754	
			−0.0094
6	1.5708	0.8660	
			−0.0096
7	1.8326	0.8756	

i) 사다리꼴의 法則에 依한 積分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_t\,dt = \frac{0.2618}{2}\{1+2(0.9916+0.9682+0.9354+0.9014+0.8754)+0.8660\}$$

$$= 1.467389$$

ii) Simpson 法則에 依한 積分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_t\,dt = \frac{0.2618}{3}\{1+4(0.9916+0.9354+0.8754)+2(0.9682+0.9014)+0.8660\}$$

$$= 1.4673715$$

iii) Stirling 公式에 依한 積分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_t\,dt = \frac{3}{10}(0.2618)\{6(0.9354)+(0.9014+0.9682)+5(0.8754+0.9916)+(0.8660+1)\}$$

$$= 1.4673628$$

iv) Bessel 公式에 依한 積分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_t\,dt = \frac{0.2618}{2}[\{1+2(0.9916+0.9682+0.9354+0.9014\ 0.8754)+0.8660\}-\frac{1}{6}(-0.0095-0)]$$

$$= 1.467595$$

어느 方法으로 求한 것이나 正確한 積分값 1.4675에 大端히 가깝다.

V. 結　　論

앞의 例證에서 볼 수 있는 것같이, 어느 方法이든 有用하게 使用할 수 있다는 것을 짐작할 수 있다.

Romberg 積分은 區間을 細分하면서 反復하여 近似積分을 求하는 方法이기 때문에 電算機에는 有用하게 使用할 수 있는 積分公式이다. 그러나, 筆算으로서는 計算하기 어려움이 많다.

一般的으로 函數 fx의 曲線을 多項式으로 近似시켰을 때 誤差가 작게끔 圓滑한 曲線이면 定義域의 區間幅을 細分하여 사다리꼴의 近似公式, Simpson 의 近似公式, Stirling 의 近似公式, Bessel 의 近似公式을 使用하여 誤差가 거의 없는 積分값을 求할 수 있다.

参 考 文 献

1) 金 泰 富 ; "數値解析", 螢雪社, 1979, (pp.166-208)

2)' 小 林 龍 ; "解析序說", 共立出版社, 1974

3) S.D, Conte, "Elementary Numerical Analysis", Mc Graw-Hill Book Co., 1965

4) P. Henricio, "Elements of Numerical Analysis", John Wiley and Sous, Inc., 1964.

5) Ralph. G. Stanfon ; "Numerical Methods for Scince and Eqiueeving Prentice Hall, 1961

Abstract

We discussed various formulae to approximate a given funcfion to polynomials, i, e, Newton's formula, Gauss formula, Stirling's formula, and Bessel's formula.

Using these formulae, We derived various integration formulae and finally We showed how precisely these formulae applied to practical problems.

要 旨

우리는 주어진 函數를 多項式으로 近似시키는 여러가지 公式 即 Newton의 公式, Gauss의, 公式,stirling 의 公式, Bessel의 公式을 硏究하고, 이 公式들을使用하여 여러가지 積分公式을 誘導하였다.

끝으로 이 近似積分公式들이 實際問題에서 큰 誤差없이 쓸수 있다는 것을 보였다.