교육학 석사학위 청구논문

실생활 문제를 수학적 모델링을 통한 미분 지도에 관한 연구

A Study on Teaching of the derivative Through Mathematical modeling on Real-life Problems

2010년 2월

인하대학교 교육대학원

수학교육전공

인 은 경

교육학 석사학위 청구논문

실생활 문제를 수학적 모델링을 통한 미분 지도에 관한 연구

A Study on Teaching of the derivative Through Mathematical modeling on Real-life Problems

2010년 2월

지도교수 이 종 성

이 논문을 석사학위 논문으로 제출함

인하대학교 교육대학원

수학교육전공

인 은 경

본 논문을 인은경의 석사학위 논문으로 인준함

2010년 2월

주심 ____________________

부심 ____________________

부심 ____________________

국 문 초 록

실생활 문제를 수학적 모델링을 통한 미분 지도에 관한 연구

미분은 수학의 꽃이라고 불리는 만큼 수학에서 중요시 하는 개념이다. 이러한 미분은 수학뿐만 아니라 다양한 분야에서 적용되는 개념이다. 수학적으로는 함수의 변화율에 대해서 연구를 하는 학문이다. 뿐만 아니라 자연과학, 사회과학 그리고 경제학 등 모든 분야에서 미분을 필요로 하고 있다. 이를 학생들에게 인식시킬 필요가 있으며 실생활과 동떨어진 학문이 아니라는 것을 보여줘야 한다. 학생들이 어려워하는 미분에 대해서 좀 더 친근하게 다가가기 위해서 실생활 문제를 도입하게 된다. 7차 개정 교육과정에서는 여러 가지 현상을 수학적 모델링을 통한 해결을 중시하고 있다.

따라서 본 연구는 NCTM의 수학적 모델링 과정을 중심으로 실생활 문제해결에 대한 지도의 방안을 제시하고자 한다. 미분의 변화율에 관한 문제와 최적화에 관한 문제로 분류해보고 이를 중심으로 다양한 문제를 해결함으로써 학생들이 두려움 없이 자연스럽게 문제를 풀어갈 수 있도록 지도 방안을 계획하는데 도움이 되었으면 한다.

목　　차

표 목 차

Ⅰ. 서 론

1. 연구의 필요성 및 목적

미분은 수학에서 뿐만 아니라 자연과학, 사회과학, 공학 등 다양한 분야에서 적용되는 분야이다. 또한 미분은 변화를 연구하는 과정으로 물리학에서의 속도, 화학에서의 반응율, 생물학에서 미생물의 변화율 등 뿐만 아니라 경제학의 경제 성장률, 한계비용, 한계이익 등 실생활에서도 다양하게 쓰인다.

그러나 실제로 학생들은 수학의 꽃이라고 불리는 미분의 문제 해결에 어려움을 가지고 있다. 학생들의 실제 수준에 비해서 어려운 고등학교 교재로 구성되어 있으며 학생들에게 동떨어진 문제로 지금의 딱딱한 강의식 수업에서 벗어나지 못하고 있다. 대학 입시를 위한 기계식 문제 풀이와 암기 위주의 학습이 이루어지고 있다. 이에 미분에 대한 수학적 두려움을 줄이고 문제 해결에 대해서 좀 더 체계적으로 구성할 필요가 있으며, 문제해결을 통한 즐거움과 흥미를 가질 수 있도록 노력해야 한다.

7차 개정 교육과정에서는 미분은 실생활과 관련된 여러 가지 문제를 수학적으로 고찰하고 해결하는 능력이 강조되고 있다. 이에 다양한 분야에서 적용되고 있는 미분에 대한 연구를 학생들이 알기 쉽도록 지도하는 방법을 연구해야 한다. 또한 실생활에서 미분이 반드시 필요한 학문임을 인식할 수 있도록 지도해야 할 것이다. 이는 수학적 모델링을 통한 실생활 문제풀이로서 접근을 해나가면 좀 더 체계적인 문제해결력 증대에 영향을 줄 것이다. 효과적인 학습지도를 위해서 다양한 실생활 문제들을 통해서 학생들은 지도하고 끊임없는 연구를 하여야 할 것

이다.

2. 연구 내용 및 방법

본 연구는 앞에서 제시한 연구의 필요성과 목적을 달성하기 위해서 다음과 같은 연구내용 및 방법을 성정한다.

첫째, 현행 교과서 ‘수학Ⅱ’, ‘미분과 적분’ 에 제시된 미분 단원의 실생활과 관련된 문제를 분석한다.

둘째, 교과서에 제시된 변화율에 관한 실생활 문제와 최적화에 관련된 실생활문제를 분류하여 그에 맞는 수학적 모델링 과정을 거쳐 문제를 해결해 본다.

3. 연구의 제한점

본 연구는 다음과 같은 제한점을 갖는다.

첫째, 본 연구에서 채택하고 있는 ‘수학Ⅱ’, ‘미분과 적분’ 교과서 모두를 분석하지 않고 임의로 선택된 교과서를 분석하였기 때문에 모두를 대표한다고 볼 수 없다.

둘째, 본 연구에 제시된 미분 지도에 관한 내용들은 문헌과 자료들을 바탕으로 이루어져 있으므로 학교 현장에서 교사들의 활용도에 따른 신뢰도와 타당도는 검증되지 않았다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 수학적 모델링

수학 교육의 목표를 보면 시대에 따라 조금씩 다르기는 하겠지만 크게 두 가지로 나눌 수 있다. 이론수학과 실제수학으로 논의될 수 있다. 어느 쪽을 강조하느냐에 따라 수학교육이 상당히 다를 수 있다. 그러나 이론수학과 실제수학 사이의 상호작용을 통하여 수학의 발달이 이루어졌으며, 수학교육에서도 이 두 가지를 분리해서 생각할 수 없다. NCTM(1989)의 규준집에서는 수학교육의 중요한 목표로 수학적 연결을 들고 있으며, 이론수학과 실제수학의 연결도 수학적 연결의 일부로 보고 있다. 이렇게 실제수학과 이론수학을 연결하는 여러 과정 중의 하나가 '수학적 모델링'이라 한다. 따라서 수학적 모델링은 수학교육의 중요한 대상이 된다. ([6])

1) 수학적 모델과 수학적 모델링의 정의 ([12])

수학적 모델링(Mathematical modeling)을 정의하기 위해서는 구체적으로 '모델(Model)'이 무엇인지에 관해 먼저 정의되어야 한다. 여기서 '모델'이란 우리 주변에서 쉽게 접하는 것으로서 일정한 비율로 줄인 복제품으로 같은 모양, 같은 색, 성질까지도 닮아 본래 대상의 많은 부분을 공유하고 특성을 가지는 성질까지도 닮아 본래 대상의 많은 부분을 공유하고 특성을 그대로 가지고 이야기 한다.

모델은 물리적 모델뿐만 아니라 이론적 모델로 구분 할 수 있다. 이론적 모델은 뉴턴의 역학 법칙, 케플러의 행성 운행에 대한 법칙과 같은 것으로써 법칙이나 이론이 수학적인 것일 때 그것을 '수학적 모델(Mathematical model)'이라 부른다.

또한 NCTM(1999)에서는 수학적 모델을 복잡한 현상의 이상화된 상태 내에서 그 요소들과 관계들의 수학적 표현라고 말한다. 더 포괄적인 의미로 수학적 모델은 현상의 이해를 분명히 하거나 문제를 해결하는데 사용하는 표현 뿐 아니라 표현에 따라 활동하고, 수학적 모델 내에서 모델화하는 모든 활동을 포함시킨다.

M. Niss(1989)는 수학적 모델이란 현실의 문제 상황 S, 수학적 대상, 관계, 구조 등의 집합 M, 그리고 S에서M으로의 대응 f로 이루어진 순서쌍(S,M,f)로 정의 한다. 즉, 고려하고 있는 분야에 속하는 어떤 대상, 그 대상사이의 관계 구조가 선택되고, 그것이 수학적 대상(집합, 도형, 함수 등), 관계, 구조로 바뀌었을 때 바뀐 대상이 수학적 모델이라는 것이다.

W. J. Meyer(1984)는 일반적인 모델과 일반적인 모델의 일부로서 수학적 모델을 이와 같이 정의하고 있다. '모델은 다른 어떤 것을 나타내는 데 사용되는 대상이나 개념이다. 모델은 축소되어 우리가 이해할 수 있는 형식으로 전환되는 현실이다.' '수학적 모델이란 상수, 변수, 함수, 방정식, 부등식과 같은 수학적 개념이 그 부분을 이루고 있는 모델이다.'

F. Swetz(1989)는 모델이란 관찰자의 마음속에 있는 어떤 현상을 정확하게 묘사하는 원리나 규칙들의 모임이다. 특히 이러한 원리나 규칙들이 수학적일 경우 수학적 모델이라 한다.

김수미(1993)는 현실 문제는 대부분 복잡하기 때문에 직접 수학적으로 다루기 힘들어 먼저 현실 문제를 단순화하여 합리적으로 정확하고 간결하게 기술하여 현실 모델을 만들고, 현실 모델이 만들어진 후, 그 모델의 단어와 개념은 수학적 기호와 표현으로 대치된다. 그 결과 만들어진 구조가 수학적 모델이라고 정의한다. ([3])

권기석(1997)은 만족스러운 수학적 모델은 두 가지의 모순이 되는 조건을 구비해야 한다. 즉, 그것은 현실적으로 실세계의 상황을 나타낼 만큼 상세해야 한다. 그리고 수학적 분석이 가능하도록 충분히 간단해야 한다. 만일 모델이 너무 상세하여 물리적인 상황을 완전히 나타낸다면 수학적인 분석을 행하기 어려울 것이다. 이와는 반대로 모델이 너무 간단하면 그 결과는 현실성이 떨어질 수도 있다. 그러므로 물리적으로 현실적인 것과 수학적으로 가능한 것 사이에 필수적인 조화가 필요하다.

또한 수학적 모델(Mathematical model)은 다음과 같은 경우를 예로 들어 다시 설명할 수 있다. 자동차를 연구하는데 필요한 모형이나 부품을 만드는 과정에서 수학적으로 그 관계를 연구하는데 필요한 모형이나 부품을 만드는 과정에서 수학적으로 그 관계를 표현할 수 있을 때 그것을 우리는 수학적 모델이라고 말할 수 있다. 또한, 힘과 운동, 진자

의 등시성, 태양중심설, 만유인력의 법칙, 보일의 법칙 등등, 과학이 여러 가지 법칙들도 수학적 관계로 표현할 수 있으므로 수학적 모델의 좋은 예라고 말할 수 있다.

수학적 모델을 구성하여 그 해결점을 찾는 과정은 실생활 문제를 해결하기 위한 것으로 수학적 모델로 보는 것이다. 즉, 수학적 모델링이란 주어진 현실 세계의 상황을 수학 세계의 수학적 모델로 구성하는 전 과정을 이르는 것이다.

수학적 모델링은 수학적 모델링 과정을 통해서 문제 상황을 해결하는 활동적인 과정을 이른다. 수학적 모델링은 유일한 해가 없다. 같은 모델이라 할지라도 그것을 구성하는 사람에 따라서 다른 경험을 갖게 되는 것이다. 자기 주도적 학습을 하는 학생들은 문제를 통해 스스로 동기유발 하고 적극적으로 탐색하게 된다. 관련된 문제를 찾아 정리되지 않은 상황에 대한 답을 구하는 모델링 과정을 겪게 된다. 학생들은 이러한 수학적 모델링 학습을 하는데 수동적인 역할이기보다는 스스로 모델을 계획하고 탐색하게 되는 활동적인 역할에 관심을 가지는 것이 바람직하다.

수학적 모델링에서는 정확한 답이 존재하지 않는다. 그렇지만, 수학적 모델링 과정을 통해서 문제해결자의 사고 과정을 볼 수 있다. 또한 사고 과정을 통해 문제해결자의 지식수준과 흥미를 파악할 수 있다. 주어진 문제를 통해서 문제 해결을 위한 실마리를 발견하여 수학적 언어로 구성할 수 있고, 해를 구할 수 있다. 상황에 맞게 문제를 재해석하며 문제를 구조화함으로 문제에 대한 형식화 능력을 기를 수 있다.

2) 수학적 모델링의 필요성

MSEB(Mathematical Sciences Education Board. 1989)에서는 Everybody Counts라는 보고서에서 ‘수학은 기회의 열쇠이다. 수학은 더 이상 과학의 언어만으로 머물러 있지 않으며, 이제는 사업과 경제, 건강 등에 기본적이고 직접적인 방법으로 공헌한다. 수학은 학생들에게 직장으로 향하는 문을 열어주고, 시민들에게 주어진 정보를 통하여 결정할 수 있도록 도와주며, 국가에게는 과학기술 공동체 속에서 다른 나라와 경쟁할 수 있는 지식을 제공한다. 미래 세계에 적극적으로 참여하기 위해서 수학적 힘을 높여야 한다.(NRC, 1989)’ 라고 하며 수학의 중요성에 대하여 이야기 하고 있다.

그렇지만 대부분 사람들은 수학을 통해서 찾을 수 있는 아름다움을 위해서 보다 주어진 문제의 해답을 얻거나 주변의 현상이나 사건에 대한 이해하기 위한 도구로 사용한다. 따라서 비수학적인 영역에서 당면한 문제를 수학적으로 해결하는 과정인 수학적 모델링을 학교 수업에 도입함으로써 학생들로 하여금 수학이 지니고 있는 응용적 특성을 인식하도록 하고, 수학적 지식이 어떤 분야에서 어떻게 응용되는가를 경험하게 해야 하며, 복합적이고 열린 문제 상황을 수학화하는 능력을 획득하게 해야 한다. ([7])

우리가 수학을 배우는 목적을 제 7차 수학과 교육과정 개정에서는 수학의 목표와 고등학교 목표를 다음과 같이 제시하고 있다. ([2])

수학적 지식과 기능을 습득하고 수학적으로 사고하고 의사소통하는 능력을 길러, 여러 가지 현상과 문제를 수학적으로 고찰하고 합리적으로 해결하는 능력을 기르며, 수학에 대한 긍정적 태도를 기른다.

① 여러 가지 현상을 수학적으로 관찰, 분석, 조직하는 경험을 통하여 수학의 발전적인 개념, 원리, 법칙과 이들 사이의 관계를 이해하는 능력을 기른다.

② 수학적으로 사고하고 의사소통하는 능력을 길러, 여러 가지 문제를 합리적으로 해결하는 능력을 기른다.

③ 수학에 대한 관심과 흥미를 지속적으로 가지고, 수학의 가치를 이해하며, 수학에 대한 긍정적 태도를 기른다.

제 7차 수학과 교육과정 개정에서는 여러 가지 현상과 문제를 수학적으로 고찰하고 합리적으로 해결하는 능력을 길러야 한다. 즉, 수학적 모델링을 학교 수학에 도입하여 수학적 지식이 어떻게 응용되는 가를 경험하고 이해하여 문제해결력의 향상을 원하고 있다.

수학적 모델링을 학교 수학에 도입해야 하는 필요성에 대한 다양한 학자들의 주장을 알아보자. Blum 과 Niss (1991)는 수학적 모델링을 학교 교육과정에 도입해야 하는 필요성을 다음과 같이 여러 관점에서 주장하고 있다. ([7])

① 형성적 관점

수학적 모델링은 수학적 상창만을 다루지 않고 실세계의 상황에서의 수학의 응용과 문제해결의 수행을 강조함으로써 보다 일반적인 능력과 태도를 개발시킬 수 있다.

② 비판적인 능력의 관점

수학의 응용과 모델링은 수학적 필요가 점점 증대되는 사회에서 학생들이 개개인으로서 그리고 사회인으로서 비판적인 능력을 가지고 살아

갈 수 있도록 준비하도록 도와준다. 즉, 사회적으로 의미가 있는 문제에 대한 해를 포함한 수학의 실제적인 사용을 인식, 이해, 분석, 판단하기 위해 독립적으로 바라보고 판단하는 것을 가능하게 해준다는 것이다.

③ 실용적인 관점

수학교육은 학생들이 문제해결이나 비수학적인 영역이나 분야를 기술하기 위해서 수학을 사용할 수 있게 도와주어야 하는데, 수학이 도구가 되는 다양한 상황에서 학생들이 스스로 문제를 인식하고 해결할 수 있게 해준다.

④ 수학에 대한 틀이라는 관점

수학의 응용과 모델링, 그리고 문제 해결은 학생들이 전체적인 수학의 틀에 대해 풍부하게 이해하게 되는 기회가 된다. 일반적으로 수학적 모델링은 모델을 설정해서 해를 구해 실제 상황과 비교해보고 다시 모델을 구성하여 앞의 과정을 반복하는 과정이며 그 답도 정확하거나 유일하지 않기 때문에 수학이란 학문도 여러 번의 시행착오를 거쳐 완성된 학문이고 다시 반복하여 수정되어질 수 있다는 인상을 심어줄 수 있다.

⑤ 수학학습의 증진이라는 관점

수학교육에서 문제해결, 응용과 모델링 그리고 활동의 통합은 학생들에게 동기와 수학적 연구들의 관련성을 제공함으로써 학생들이 수학적 개념, 방법, 결과를 익히고 기억할 수 있도록 도와준다. 이것은 수학을 가르칠 때, 어려서부터 가능한 한 많은 실세계 맥락의 문제를 다루어야 하며, 일회성이 아니라 끊임없이 실제에서 출발하여야 한다는 실제적 수학교육 (Rearistic Mathematical Education, RME) 학과 Freudenthal의 주장과 일맥상통한다.

또한 김수미 (1993)는 수학적 모델링의 교육과정 도입 필요성을 다음과 같이 제시하였다. ([3])

① 일반적인 능력과 태도 개발

수학적 모델링은 수학적 상황 뿐 아니라 실세계 상황, 과학적 상황, 사회적 상황을 다루기 때문에 수학적 상황으로, 역으로 수학적 상황을 실세계 상황으로 바꾸는 능력은 수학적 모델링 같은 과정에서만 증진될 수 있는 능력으로 학생들에게 개방성, 자기 신뢰성과 탐구적, 창조적, 문제해결능력을 개발시킬 수 있는 수단이 된다.

② 비판적 능력 신장

수학적 모델링 내에 있는 여러 과정들이 학생의 비판적 능력을 키워줄 수 있다. 문제를 분석하여 수학화하는 과정, 수학적 해를 실제 상황에 해석하는 과정, 실제 상황과 비교해서 수학적 해의 적절성을 판단하는 과정, 모델을 수정하는 과정에서 학생들은 실제 사용되는 수학 예들과 사회적으로 중요한 문제에 주어진 해들을 스스로 판단하고, 인식하고, 이해하고, 분석하고, 평가함으로써 비판적 능력이 키워진다.

③ 수학의 실용성 인식

수학이 사회에서 실제적이고 과학적인 것에 유용하다는 면이 인식할 수 있도록 한다. 따라서 학생들에게 다양한 변화 현상을 접하도록 수학적 모델링 수업을 구성해야 한다.

④ 수학에 대한 바람직한 인상 형성

수학적 모델링의 답은 정확하거나 유일하지 않기 때문에 수학이 절대적 진리의 모임이고 천재들에 의해 발견된 학문이라는 잘못된 관련을 제거함으로서 수학에 대한 인식을 새롭게 할 수 있다.

⑤ 수학에 대한 동기 유발

현실상황 속에서 수학적 모델링을 다루는 것은 수학에 매력을 느끼지 못하고, 수학이 자신의 현재, 미래의 삶에 가시적 관련성을 갖고 있지 않다고 생각하는 학생들에게 수학적 활동이 가치 있는 것임을 확신시키고 동기유발을 시킬 수 있다.

⑥ 수학적 기능 연마

수학적 아이디어, 개념, 방법, 이론을 획득하고 이해하는 것을 도와주며, 그것을 설명하고 해석하는 기회를 부여하므로 수학적 기능을 연마할 수 있다.

이러한 수학적 모델링 과정을 통한 수학 학습은 새로운 수학적 개념을 도입하거나 개발된 수학적 개념을 새로운 상황에 적용하는 데 유용하여, 중요한 수학적 아이디어와 문제해결 과정에 강력한 수단이 된다. 이에 수학적 모델링을 통하여 수학교육에 다음과 같은 목적을 달성할 수 있다. ([7])

① 새로운 수학적 방법과 개연을 이해한다.

② 실생활 또는 다른 교과에서의 수학의 응용과 모델링의 실제를 이해한다.

③ 창의적 사고와 문제해결 태도, 활동, 능력을 기른다.

④ 수학을 활용하여 실생활 또는 다른 교과와 연결된 맥락을 비판적이고 합리적으로 사고하려는 태도를 기른다.

⑤ 수학이 이미 완성된 산물이 아니라, 인간 활동의 결과로 만들어진 것임을 이해한다.

3) 수학적 모델링의 과정 ([8])

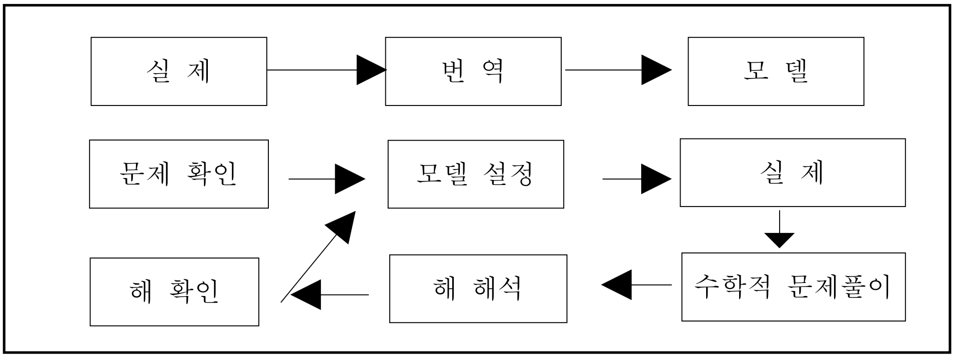
수학적 모델링이란 수학적 모델을 구성하여 실 생활 문제를 해결하는 전체 과정을 말한다. 단지 존재하는 현상 전체의 단순화된 상을 찾는 것 보다는 현상˙일부분의 조작 가능한 상을 찾는 것이다. 문제 상황에서 유용한 요소를 추출하여 수학적 언어로 번역, 조작하여 해를 얻고 그것을 통해 원래의 상황에 알맞게 해석하는 과정으로 문제해결과정을 구조화한다. 이러한 수학적 모델링은 학자에 따라 여러 가지로 제시되었다. 지금까지 제시된 수학적 모델링 과정을 간략하게 살펴보면 다음과 같다.

D. N Burghes(1986)는 가장 기초적인 수학적 모델링 과정을 다음과 같이 제시하고 있다. ([8])

[표1. D. N Burghes의 수학적 모델링 과정]

왼쪽 사각형은 비수학적 상황의 문제가 일상 언어로 제시된 실세계를 표현한다. 그 문제를 적절히 표현할 수 있는 중요한 인자를 선택하고, 문제의 특징을 나타내는 변수 사이의 관계를 설정함으로써 문제가 수학적 형태로 바뀐다. 위의 과정은 모델링 과정을 충분히 나타내지는 않지만, 간단하게 모델링 과정을 살펴볼 수 있다.

J. S. Berry의 수학적 모델링 과정은 D. N. Burghes의 모델링을 보완하였다. ([8])



[표2. J. S. Berry의 수학적 모델링 과정]

J. S. Berry의 수학적 모델링과정은 모델링 과정이 반복적이라는 것을 보여준다.

Blum(1989)의 견해에 따르면 다음과 같다. ([12])

① 문제의 이상화 단계

현실 문제에서 유용한 요소를 추출하여 문제를 단순화하여 문제 해결의 관점에서 정확하고 간결한 형태로 표현된다. 이러한 과정의 결과인 문제의 단순화를 현실적 모델(real model)이라고 한다. 이것은 일상적 용어로 되어있다.

② 번역의 단계

형성된 현실적 모델에서 일상용어와 개념을 수학적 기호와 표현으로 바꾼다. 결과로 산출되는 구조를 수학적 모델이라고 부른다. 수학적 모델은 수학적 대상(집합, 수, 변환, 도표)을 다룬다.

③ 수학적 추론

형성된 수학적 모델에 수학적 방법과 기술(추론, 분석, 풀이, 평가)을 사용하여 모델에 근거한 결론을 유추한다.

④ 해석

앞서 유추된 결론을 원래의 문제와 연관시킨다. 이 과정에서 유추된 결론의 의미를 고려하여 만일 적합하지 않으면 모델 자체에 오류가 있는 것이므로 앞에서의 단계를 다시 되풀이하고 결론을 문제 상황에 적절한 형태로 해석해야 한다.

NCTM(1991)에서 제시한 모델링 과정은 다음과 같은 단계로 구성된다. ([8])

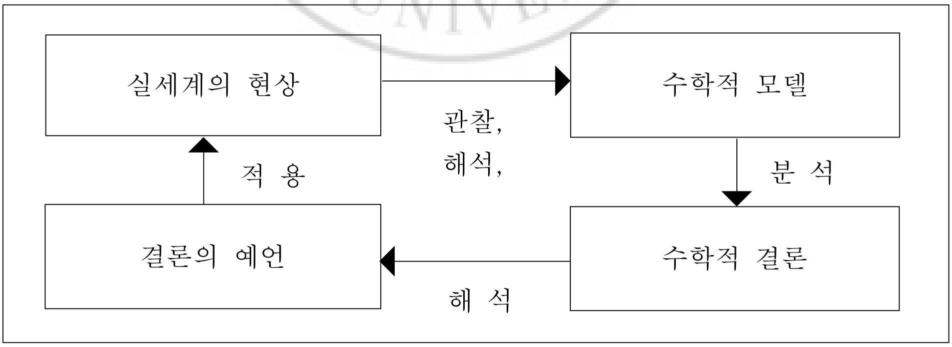
① 현상을 관찰하고, 그 현상이 가지고 있는 문제 상황을 서술하고, 문제에 영향을 끼치는 중요한 인자들(변인, 모수)를 찾아낸다.

② 현상에 대한 모델을 얻기 위해 인자들 사이의 관계를 추측하고, 그 관계들을 수학적으로 해석한다.

③ 모델에 적절한 수학적인 분석을 한다.

④ 결과를 얻고 실제 상황에서 결과들을 해석하고 결론을 끌어낸다.

위의 단계를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



[표3. N.C.T.M이 제시한 수학적 모델링 과정]

이러한 수학적 모델링 과정을 김수미(1993)가 공통점을 정리 하였다.([3])

① 문제 이해 단계

제시된 문제를 읽고 이해하는 단계이다. 문제에서 구하고자 하는 것과 주어진 것을 확인한다.

② 문제의 이상화 단계

실세계 상황 문제에서 중요한 특성을 찾는다. 문제를 파악할 때 현실 문제에서 유용한 요소를 추출하여 문제를 단순화하는 것이다. 비수학적인 상황을 구조화 하고, 고려할 측면과 질문하고 있는 것을 명확하게 한다. 비수학적인 상황이 이상화된 단계에서 나타나는 결과를 실제 모델이라 부른다.

③ 수학적 모델 형성 단계

실제 모델을 수학적 모델로 바꾸는 단계이다. 이 단계를 수학적 형식화('수학화')하고 부른다. 형성된 실제 모델에서 일상용어와 개념을 수학적 기호와 표현으로 바꾼다. 즉, 수학화 단계는 실제 모델에서 가장 중요한 것으로 생각되는 요소들과의 관계를 수학적 대상과 그 사이에서의 관계로 바꾸는 단계이다. 이 단계는 학생들이 가장 많은 도움을 필요하여 교사의 적절한 안내가 필요하다.

④ 수학적 추론 단계

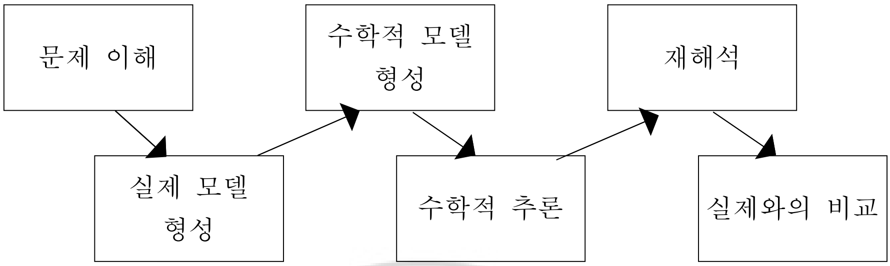
수학적 방법을 사용하여 수학적 결과와 결론을 이끌어낸다. 형성된 수학적 모델에 수학적 방법과 기술(추론, 분석, 풀이, 평가 등)을 통하여 모델에 근거한 결론을 추론한다.

⑤ 재해석 단계

수학적 추론 결과를 원래의 문제 상황과 관련지어서, 상황의 결과와 결론으로 해석한다. 수학적 단계에서 실제 상황을 수학적 상황으로 바꾸는 은유적 사고과정을 거치는데, 수학적 해의 재해석 단계에서는 역사고 작용이 일어난다.

⑥ 실제와의 비교 단계

만약 수학적 결론이 상황에 적합하지 않는다면 모델을 수정한다. 다른 모델과의 비교 하고 기존의 이론과 연결이 지어보면서 모델을 평가하고 적합한 모델을 찾아본다.



[표4. 김수미가 정리한 수학적 모델링 과정]

이렇게 다양한 학자들의 수학적 모델링 과정에 대해서 살펴보았다. 이들의 과정을 보면 대개 비슷한 과정으로 이루어져 있다. 이를 통한 실생활 문제 해결이 가능함을 보일 수 있다.

2. 현행 교육과정의 미분 내용

1) 제 7차 수학과 교육과정의 미분내용 ([1])

(1) 수학 Ⅱ

(가) 성격

‘수학 Ⅱ’는 ‘수학Ⅰ’을 이수한 다음에 학생들이 수학을 더욱 높은 수준으로 학습하기 위하여 선택할 수 있는 과목이다. 보다 심화된 수학적

지식의 습득과 수학적 사고 방법, 논리적 추론 능력을 키워 문제를 합리적으로 해결하는 능력과 태도를 기르게 하며, 자연 과학 및 공학 분야의 학습에 기초가 된다. 이 과목은 대학의 자연 계열 또는 공학 계열로 진학을 희망하는 학생들이 이수하기에 알맞은 과목이다.

'수학 Ⅱ'의 학습에서는 10단계까지의 수학과 '수학Ⅰ'에서 습득한 수학적 개념, 원리, 법칙을 토대로 하여 새로운 개념에 접근해 나아가야 하므로, 기본적인 수학적 지식을 항상 확인하고 활용하면서 발전적인 학습이 이루어지도록 해야 한다. 또, 습득된 수학적 지식과 사고 방법을 기초로 문제를 발견하고, 자주적으로 문제를 해결해 나아가도록 하며, 수학에 대한 흥미, 자신감, 가치관을 가질 수 있도록 중점을 두었다.

(나) 목표

제 7차 교육과정을 통하여 추구하는 인간상은 개성을 추구하는 사람, 창의적인 능력을 발휘하는 사람, 진로를 개척하는 사람, 새로운 가치를 창조하는 사람, 공동체의 발전에 공헌하는 사람이다. 이를 구현하기 위하여 '수학 Ⅱ'의 교육 목표를 제시한다.

수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙을 이해하는 능력, 수학적 사고력과 추론 능력, 수학에 대한 긍정적인 성향 등을 길러 높은 수준의 여러 가지 문제를 스스로 이해하고, 합리적이고 창의적으로 해결하는 능력과 태도를 기른다.

① 방정식과 부등식의 풀이 방법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

② 미적분의 기본 개념과 법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

③ 이차곡선, 공간도형, 공간좌표의 개념과 성질을 이해하고, 이를 활

용할 수 있다.

④ 벡터의 개념을 이해하고, 이를 활용하여 도형을 고찰할 수 있다.

우선 전체적인 목표는 수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙을 이해하는 능력, 수학적 사고력과 추론 능력, 수학에 대한 긍정적인 성향 등을 길러 높은 수준의 여러 가지 문제를 스스로 이해하고, 합리적이고 창의적으로 해결하는 능력과 태도를 기르는 것이다. 세부적으로 살펴보면 '②'에서는 미적분의 기본 개념과 법칙의 이해와 활용을 본다.

(다) 내용 및 지도상 유의점

- 다항함수에서의 미분계수

① 미분계수의 뜻을 알고 그 값을 구할 수 있다.

② 미분계수의 기하학적 의미를 이해한다.

③ 미분가능성과 연속성의 관계를 이해한다.

-다항함수에서의 도함수

① 함수 $y=x^n$(n은 양의 정수)의 도함수를 구할 수 있다.

② 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다.

- 도함수의 활용

① 접선의 방정식을 구할 수 있다.

② 함수의 증가와 감소를 판정할 수 있다.

③ 함수의 극대와 극소를 판정할 수 있다.

④ 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

⑤ 방정식과 부등식에 활용할 수 있다.

⑥ 속도와 가속도에 관한 문제에 활용할 수 있다.

<학습 지도상의 유의점>

① 미분가능성과 연속성의 관계는 그래프를 통하여 확인하도록 한다.

② 미분에서는 간단한 함수만 다룬다.

(2) 미분과 적분

(가) 성격

대학에서 높은 수준의 수학을 필요로 하는 학생들에게는 ‘수학 Ⅰ’과 ‘수학 Ⅱ’ 의 내용만으로는 부족하다. ‘미분과 적분’은 이런 학생들을 위한 과목으로, ‘수학 Ⅱ’를 바탕으로 연계되는 보다 높은 수학적 지식과 기능 및 논리적이고 창의적인 수학적 사고력이 요구되는 내용으로 구성되어 있다. 이를 바탕으로 교육과정에는 ‘미분과 적분’의 성격을 공시했다.

‘미분과 적분’은 ‘수학 Ⅱ’의 다항함수의 미분법, 적분법을 학습한 다음에, 여러 가지 함수의 미분과 적분을 학습하기 위하여 선택할 수 있는 과목으로서, 미분, 적분에 대한 심화된 수학적 지식의 습득과 수학적 사고 방법, 논리적 추론 능력을 키워 문제를 합리적으로 해결하는 능력과 태도를 기르게 하며, 자연 과학 및 공학 분야의 학습에 기초가 된다. 이 과목은 대학의 자연 계열 또는 공학 계열로 진학을 희망하는 학생들이 이수하기에 알맞은 과목이다.

‘미분과 적분’ 과목의 학습에서는 ‘수학 Ⅰ’과 ‘수학 Ⅱ’에서 습득한 수학적 개념, 원리, 법칙을 토대로 하여 여러 가지 함수의 극한, 미적분에 관한 개념과 그 성질을 이해하고 활용하는 데 중점을 둔다.

(나) 목표

제 7차 교육 과정을 통하여 추구하는 인간상은 개성을 추구하는 사람, 창의적인 능력을 발휘하는 사람, 진로를 개척하는 사람, 새로운 가치를 창조하는 사람, 공동체의 발전에 공헌하는 사람이다. 이러한 인간상을 구현하기 위하여 '미분과 적분'의 교육 목표를 제시한다.

여러 가지 함수의 극한의 개념을 이해하고 미분법과 적분법의 개념을 이해하여 실생활에 관한 여러 가지 문제를 수학적으로 해결하는 능력과 태도를 기른다.

① 여러 가지 함수의 극한에 관한 성질을 이해한다.
② 여러 가지 함수의 도함수를 구할 수 있고, 활용할 수 있다.
③ 여러 가지 함수의 적분법을 이해하고, 활용할 수 있다.
④ 미분과 적분을 활용하여 실생활에 관련된 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.

우선 전체적인 목표는 여러 가지 함수의 극한의 개념을 이해하고 미분법과 적분법의 개념을 이해하여 높은 수준의 여러 가지 문제를 이해하고, 실생활에 관한 여러 가지 문제를 수학적으로 해결하는 능력과 태도를 기르는 것이다. 세부적으로 살펴보면 '②'에서는 여러 가지 함수의 도함수 구하기와 그 활용을, '④'에서는 미분과 적분을 활용하여 실생활에 관련된 여러 가지 문제 해결을 할 수 있도록 해야 한다.

(다) 내용 및 지도상 유의점

- 여러 가지 함수의 미분법

① 함수의 몫을 미분할 수 있다.

② 합성함수를 미분할 수 있다.

③ 매개변수로 나타내어진 함수를 미분할 수 있다.

④ 음함수와 역함수를 미분할 수 있다.

⑤ 삼각함수를 미분할 수 있다.

⑥ 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다.

⑦ 이계도함수를 구할 수 있다.

- 도함수의 활용

① 접선의 방정식을 구할 수 있다.

② 함수에 대한 평균값의 정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

③ 함수의 증가, 감소를 판정할 수 있다.

④ 함수의 극대와 극소를 판정할 수 있다.

⑤ 여러 가지 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

⑥ 방정식과 부등식에 활용할 수 있다.

⑦ 속도와 가속도에 관한 문제에 활용할 수 있다.

<학습 지도상의 유의점>

① 함수 $y=x^n$(n의 실수)의 도함수를 구할 수 있도록 한다.

② 삼계도함수 이상은 다루지 않는다.

③ 도함수의 다양한 활용을 통해 미분법이 실생활에 유용함을 인식하게 한다.

2) 제 7차 수학과 교육과정 개정안의 미분내용 ([2])

제7차 수학과 교육과정 개정안에서 미분의 관한 내용은 인문사회계열 학생들이 배우는 '미적분과 통계 기본'이 있다. 또한 좀 더 높은 수준의 수학을 학습하기 위하여 선택할 수 있는 과목으로 자연계열 학생들이 '수학 Ⅱ'를 통해서 미분의 내용을 학습할 수 있다.

(1) 미적분과 통계의 기본

(가) 성격

- '미적분과 통계 기본'의 성격

'미적분과 통계 기본'은 국민 공통 기본 교육기간인 고등학교 1학년까지의 수학을 이수한 후 보다 높은 수준의 수학을 학습하기 위하여 선택할 수 있는 과목으로, 대학에 진학하여 인문 과학, 사회 과학 등의 분야를 전공하고자 하는 학생이 이수하기에 알맞은 과목이다. 이를 학습하기 위해서는 고등학교 1학년까지의 수학과 '수학 Ⅰ'의 내용에 대한 이해가 전제되어야 한다.

- '미적분과 통계 기본'의 목적

'미적분과 통계 기본'의 학습을 통하여 수학적 개념, 원리, 법칙을 이해하고 수학적 사고 능력을 키워 합리적이고 창의적으로 문제를 해결하는 능력과 태도를 기를 수 있다. 수학을 학습하는 목적은 기본적으로는 수학적 개념, 원리, 법칙을 이해하는 것이다 그러나 단순한 지식의 획득에 국한된 것이 아니라 수학적 사고 능력을 신장시키고 궁극적으로는 합리적이고 창의적으로 문제를 해결하는 능력과 태도를 기르는

것이다. 따라서 수학적 개념, 원리 법칙의 이해를 통한 수학적사고 능력 신장, 이에 기초한 문제해결력의 신장인 것이다.

- '미적분과 통계 기본'의 내용

'미적분과 통계 기본'의 내용은 '함수의 극한과 연속', '다항함수의 미분법', '다항함수의 적분법', '확률', '통계'의 영역으로 구성되어 있다.

'미적분과 통계 기본'은 고등학교 1학년까지의 수학을 배운 후에 선택할 수 있는 과목으로 '수학 Ⅰ'을 선수과목으로 하지는 않지만, 실제적으로 함수의 극한을 이해하기 위해서는 '수학 Ⅰ'의 수열의 극한에 대한 이해가 전제되어야 한다.

- '미적분과 통계 기본'의 주안점

'미적분과 통계 기본'의 교수·학습에서는 고등학교 1학년까지의 수학과 다른 선택과목에서 습득한 수학적 개념, 원리 법칙을 토대로 하여 새로운 개념에 접근해야 하므로, 이에 필요한 극한 개념 등 기본적인 수학적 지식을 확인하고 활용하면서 발전적인 학습이 이루어지도록 한다.

- '미적분과 통계 기본'의 교수·학습 방향

여러 가지 현상을 수학적으로 해석하고 조직하는 활동, 구체적인 사실에서 점진적으로 추상화로 나아가는 과정, 직관이나 구체적인 조작 활동에 바탕을 둔 통찰 등의 수학적 경험을 통하여 형식이나 관계를 발견하는 것이 중요하다. 또한, 수학적 문제를 해결하는 과정에서 문제를 명확히 이해하고 합리적인 해결 계획을 세워 실행하며, 반성을 통하여 풀이 과정을 점검하고 다양하게 활용하는 능력을 기르도록 한다. 수학적 지식과 기능을 활용하여 여러 가지 문제를 해결해 봄으로써 수학

의 필요성과 유용성을 기르도록 한다.

(나) 목표

수학적 개념, 원리, 법칙을 이해하고, 수학적으로 사고하고 의사소통하는 능력을 신장하여 여러 가지 문제를 합리적이고 창의적으로 해결하며, 수학의 실용성을 인식하여 수학에 대한 긍정적 태도를 갖는다.

① 연속함수, 미분과 적분, 확률과 통계에 관련된 개념, 원리, 법칙과 이들 사이의 관계를 이해하고 이를 활용하는 능력을 기른다.
② 여러 가지 현상을 관찰, 분석, 조직하여 수학적으로 나타내는 능력을 기른다.
③ 수학을 통하여 여러 가지 문제를 합리적으로 해결하는 능력을 기른다.
④ 수학적으로 사고하고 의사소통하는 능력을 기른다.
⑤ 수학의 가치를 이해하여 수학에 대한 관심과 흥미를 지속적으로 가지며 수학에 대한 긍정적 태도를 기른다.

(다) 내용 및 지도의 의의와 개요

- 다항함수의 미분법의 지도 의의

'미적분과 통계 기본'에서는 다항함수의 미분법의 내용에서 미분계수, 도함수, 도함수의 활용을 다룬다. 미분법에서 도함수는 중요한 가치를 지니고 있다. 초등학교의 경우 '함수'라는 용어를 직접적으로 언급하지 않지만 함수라는 내용을 다루고, 중학교와 고등학교에서도 함수의 정의부터 시작하여 다양하게 활용된 사례를 다루고 있다. 이러한 함수의 개념을 도함수라는 새로운 개념으로 형성하게 하는 토대가 되는 것이 미분계수이다. 미분계수의 정의를 충실히 이해한 뒤 다항함수의 미분법

이 물리학, 생물학, 경영학, 경제학, 언어학, 의학, 정치학, 심리학 등 다양한 면을 적용하면서 배우는 것을 알면 학생들은 다항함수의 미분법에 대해 더욱 흥미와 관심을 갖고 학습할 수 있을 것이다.

다항함수의 미분법에서는 미분이 간편한 다항함수를 소재로 하여 미분에 대한 기본 개념을 익히고 활용하는 기본적인 방법을 익힐 수 있게 한다. 이때, 미분법의 공식만 알고 단순한 적용하기 보다는 미분의 의미를 잘 이해하고, 변화 현상을 미분 개념을 활용하여 이해하고 분석하며, 문제를 해결할 수 있게 한다.

- 다항함수의 미분법 내용 개요

다항함수의 미분법 영역에서는 미분계수, 도함수를 학습하고, 도함수의 활용으로서 접선의 방정식, 함수의 증가와 감소, 함수의 극대와 극소, 함수의 그래프, 함수의 최대와 최소, 도함수의 방정식과 부등식에의 응용, 속도와 가속도 등에 대한 내용을 학습한다.

(2) 수학Ⅱ

(가) 성격

- '수학 Ⅱ'의 성격

'수학 Ⅱ'는 국민 공통 기본 교육 기간인 고등학교 1학년까지의 수학을 이수한 후 보다 높은 수준의 수학을 학습하기 위하여 선택할 수 있는 과목으로, 대학의 자연 계열 또는 공학 계열로 진학을 희망하는 학생에게 필요한 기본 과목이다.

- '수학 Ⅱ'의 목적

‘수학 Ⅱ’는 심화된 수학적 지식과 사고방법을 습득하고, 논리적 추론 능력을 키워 문제를 합리적으로 해결하는 능력과 태도를 기르게 함으로써 자연 과학 및 공학 분야의 학습에 기초를 제공하다.

- ‘수학 Ⅱ’의 내용

‘수학 Ⅱ’의 내용은 ‘방정식’, ‘부등식’, ‘삼각함수’, ‘함수의 극한과 연속’, ‘미분법’의 영역으로 구성된다.

- ‘수학 Ⅱ’의 주안점

‘수학 Ⅱ’의 교수·학습에서는 고등학교 1학년까지의 수학과 다른 선택 과목에서 습득한 수학적 개념, 원리, 법칙을 토대로 하여 새로운 개념에 접근해야 하므로, 이에 필요한 극한 개념 등 새로운 개념에 접근해야 하므로, 기본적인 수학적 지식을 확인하고 활용하면서 발전적인 학습이 이루어지도록 한다.

- ‘수학 Ⅱ’의 교수·학습 방향

여러 가지 현상을 수학적으로 해석하고 조직하는 활동, 구체적인 사실에서 점진적으로 추상화로 나아가는 과정, 직관이나 구체적인 조작 활동에 바탕을 둔 통찰 등의 수학적 경험을 통하여 형식이나 관계를 발견하는 것이 중요하다. 또한 수학적 문제를 해결하는 과정에서 문제를 명확히 이해하고 합리적인 해결 계획을 세워 실행하며, 반성을 통하여 풀이 과정을 점검하고 다양하게 활용하는 능력을 기르도록 한다. 수학적 지식과 기능을 활용하여 여러 가지 문제를 해결해 봄으로써 수학의 필요성과 유용성을 인식하고, 수학 학습의 즐거움을 경험해 봄으로써 수학에 대한 긍정적인 태도를 갖게 한다.

(나) 목표

수학적 개념, 원리, 법칙을 이해하고 수학적으로 사고하고 의사소통하는 능력을 신장하여 여러 가지 문제를 합리적이고 창의적으로 해결하며, 수학의 실용성을 인식하여 수학에 대한 긍정적 태도를 갖는다.

① 방정식, 부등식, 삼각함수, 함수의 극한과 연속, 미분법에 관련된 개념, 원리, 법칙과 이들 사이의 관계를 이해하고 이를 활용하는 능력을 기른다.

② 여러 가지 현상을 관찰, 분석, 조직하여 수학적으로 나타내는 능력을 기른다.

③ 수학을 통하여 여러 가지 문제를 합리적으로 해결하는 능력을 기른다.

④ 수학적으로 사고하고 의사소통하는 능력을 기른다.

⑤ 수학의 가치를 이해하여 수학에 대한 관심과 흥미를 지속적으로 가지며 수학에 대한 긍정적 태도를 기른다.

(다) 내용 및 지도의 의의와 개요

- 미분법 지도의 의의

미분법은 미적분학(Calculus)의 한 영역으로 17세기 뉴턴과 라이프니츠에 의하여 독립적으로 정립되었다. 근대 이후 과학 기술 문명이 급속도로 발전함으로 미분법이 사용되지 않는 영역이 없을 만큼 다방면으로 이용되고 있다. 현대 수학 중에서 최고의 걸작이라 불릴 만큼 미적분학의 이해는 필수적인 것으로 받아들여지고 있다.

미분법은 사회 현상 및 자연 현상을 이해하고 분석하기 위해 수식화하고, 이들에 대한 수학적인 해법을 찾아 해석하는 과정에서 가장 유용

하게 사용되어지고 있다. 현재 우리 일상생활의 거의 모든 분야에서 미분과 관련된 현상을 볼 수 있으며, 사회의 다양한 많은 현상을 미분으로 설명하고 있는 실정이다. 따라서 미분법의 학습을 통해 자연 현상뿐만 아니라 현대 사회의 다양한 현상을 이해하는 능력을 길러 줄 수 있을 것이다.

- 미분법 내용 개요

미분법에서는 이를 바탕으로 미분계수, 도함수, 여러 가지 함수의 미분법, 도함수의 활용에 대해 학습한다.

Ⅲ. 실생활 문제의 해결을 위한 수학적 모델링

실생활 문제를 수학적 모델링으로 해결하기 위해서는 현실 모델을 수학적 기호와 표현에 의해 수학적 모델을 만들고 수학적 모델을 토대로 해를 이끌어 내는 것이다. 수학적 모델링 과정은 여러 가지로 제시되었다. 결국은 표현 방식이 조금씩 다를 뿐, 내용적으로는 비슷한 것으로 볼 수 있다.

본 논문에서는 수학적 모델링을 통한 실생활 미분 문제 해결 능력을 신장시키기 위하여 NCTM의 문제 해결 모델을 바탕으로 네 단계로 제시 하였다.

1. 미분 단원에 제시된 개념과 실생활 문제

우선 현행 교과서에 나타난 미분 단원에서의 개념을 살펴보면서 각 개념들과 관련된 실생활 문제에 대해서 알아보자.

두 함수 $f(x), g(x)$가 미분 가능하고 c가 상수 일 때,

① $y = x^n$이면　　$y' = nx^{n-1}$(n은 0또는 양의 정수)

② $y = cf(x)$이면　　$y' = cf'(x)$

③ $y = f(x) \pm g(x)$이면　　$y' = f'(x) \pm g'(x)$

④ $y = f(x)g(x)$이면　　$y' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

<예>

1000l의 물을 달을 수 있는 원기둥 모양을 한 물통 안에 물이 가득 차 있다. 물통의 아래쪽에 달린 수도꼭지를 틀어서 물을 내보낸 지 10분 만에 물통의 물이 모두 흘러나온다면, 토리첼리의 정리에 의하여 t분 후에 물통에 남아 있는 물의 부피 V는

$$V(t) = 1000\left(1 - \frac{t}{10}\right)^2 \quad (\text{단, } 0 \le t \le 10)$$

으로 주어진다. 수도꼭지를 틀은 지 3분 후의 V(t)의 순간변화율을 구하여라. ([5])

<u>몫의 미분법</u>

$y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$에서 두 한수 $f(x), g(x)$ $(g(x) \ne 0)$가 미분가능할 때,

$$y' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

특히, $f(x) = 1$이면 $y' = -\dfrac{g'(x)}{g(x)^2}$

<예>

피는 심장으로부터 나와 신체의 혈관과 모세 혈관을 돌면서 다시 심장으로 되돌아가며, 이때 심장에서 멀어질수록 혈압이 낮아지게 된다. 다음은 어떤 사람의 심장에서 피가 나온 후 t초가 경과하였을 때의 혈압 P를 나타낸 식이다.

$$P = \frac{25t^2 + 125}{t^2 + 1} \quad (\text{단, } 1 \le t \le 10)$$

시각 t에서의 혈압의 순간변화율을 나타내는 식을 구하여라. ([9])

합성함수의 미분법

두 함수 $y=f(u), u=g(x)$ 가 미분가능할 때, 합성함수 $y=f(g(x))$의 도함수는

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=f'(g(x))g'(x)$$

역함수의 미분법

함수 $y=f(x)$가 미분가능하고, 그 역함수가 존재할 때, $\frac{dy}{dx}\neq 0$이면

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

<예>

재활용 종이를 이용한 두루마리 휴지를 생산하는 화장지 제조회사가 있다. 기계를 작동하는 시간은 x라 할 때, 생산된 재활용 두루마리 휴지의 양 y사이에는 다음과 같은 관계가 있다고 한다.

$$y=\sqrt{2x+15}$$

역함수의 미분법을 이용하여 시간에 따라 생산된 휴지의 양의 변화율을 나타내는 식을 구하여라. ([9])

극값에서의 미분계수

미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값을 가지면

$$f'(a)=0$$

함수의 증가와 감소

함수 $y=f(x)$가 어떤 구간에서 미분가능할 때, 이 구간의 모든 x에 대하여

① $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 그 구간에서 증가한다.

② $f'(x)<0$이면 $f(x)$는 그 구간에서 감소한다.

극대, 극소의 판정

미분가능한 함수 $y=f(x)$에서 $f'(a)=0$일 때, $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가

① 양(+)에서 음(-)으로 바뀌면,

함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이고, 극댓값은 $f(a)$이다.

② 음(-)에서 양(+)으로 바뀌면,

함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이고, 극솟값은 $f(a)$이다.

<예>

연지는 한지 공예 작품으로 밑면이 정육각형의 보석함을 만들어야 한다. 한 변의 길이가 $20\sqrt{3}cm$인 정육각형 모양의 두꺼운 종이가 주어졌을 때, 높이를 얼마로 해야 보석한의 부피가 최대로 될 수 있는지 구하여라. ([4])

속도와 가속도

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 좌표를 x를 $x=f(t)$, 속도를 $v(t)$, 가속도를 $a(t)$라 하면 다음이 성립한다.

① $v(t)=f'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\dfrac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$

② $a(t) = v'(t) = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{v(t+\triangle t) - v(t)}{\triangle t}$

<예>

키가 160cm인 사람이 지상에서 4.8m 높이에 있는 가로등의 바로 아래에서 출발하여 일직선으로 1.2m/초의 속도로 걸어가고 있다. 이 사람의 그림자의 앞 끝이 움직이는 속도를 구하라. ([10])

<u>평면 위의 운동</u>

$x = f(t)$, $y = g(t)$로 나타내어지는 평면 위의 점 $P(x,y)$에 대하여

① 속도 $\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = (f'(t), g'(t))$

② 속력 $|\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2}$

③ 가속도 $\vec{a} = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}\right) = (f''(t), g''(t))$

④ 가속도의 크기 $|\vec{a}| = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2} = \sqrt{f''(t)^2 + g''(t)^2}$

<예> 유민이는 산악자전거를 구입하고, 반지름이 0.5m인 자전거 바퀴에 야광등을 달았다. 이 자전거를 평지에서 탈 때, t초 후의 야광등의 위치 $P(x,y)$는

$$x = 2(t - \sin t), \quad y = 2(1 - \cos t)$$

로 나타낼 수 있다. 점 P의 속도, 속력, 가속도를 구하라. ([9])

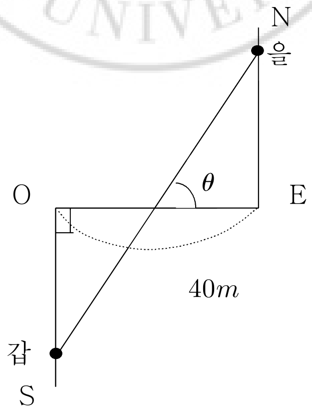
2. 수학적 모델링을 통한 실생활 문제의 해결

앞에서 실생활 문제와 관련된 미분 개념에 대해서 살펴보았다. 이에 미분에서의 변화율에 관한 실생활 문제와 최적화에 관한 실생활 문제를 수학적 모델링을 통한 해결을 해보기로 한다. 여기서 실생활 문제들은 교과서 '수학 Ⅱ', '미분과 적분' 그리고 수능 기출 문제에서 택하여 본다.

1) 변화율에 관련된 실생활 문제 해결을 위한 수학적 모델링

[문제]

아래 그림과 같이 갑은 지점 O에서 출발하여 선분 OE에 수진인 반직선 OS를 따라서 $3m$/초인 일정한 속력으로 달리고, 을은 갑이 출발한지 10초가 되는 순간 지점 E에서 출발하여 선분 OE에 수직인 반직선 EN을 따라 $4m$/초의 일정한 속력으로 달린다. 갑과 을의 지점을 연결하여 만든 선분 OE가 만나서 이루는 각을 θ(라디안)라 할 때, 갑이 출발한지 20초가 되는 순간 θ의 변화율은? ([15])



① $\frac{21}{290}$라디안/초11　　② $\frac{13}{290}$라디안/초　　③ $\frac{7}{290}$라디안/초

④ $\frac{3}{290}$라디안/초　　⑤ $\frac{1}{290}$라디안/초

[풀이]

① 실세계 문제 상황 설정(단순화/형식화)

- 주어진 것 : 갑은 O에서 수직으로 3m/초로 달린다. 을은 E에서 갑의 방향과 반대로 갑이 출발한 뒤 10초 뒤에 4m/초로 달린다.
- 구하는 것 : 선분 OE와 갑과 을의 지점을 연결한 선분이 이루는 각 θ라고 하면, 갑이 출발한지 20초가 되는 순간의 θ의 변화율

② 수학적 모델 설정 (수학화)

t초 후 갑의 위치를 S′, 을의 위치를 N′이라고 하면,

$\overline{OS'} = x,\ \overline{ON'} = y \quad \frac{dx}{dy} = 3,\ \frac{dy}{dt} = 4$

$\angle N'S'E' = \theta$이므로 $\tan\theta = \frac{x+y}{40}$ 를 양변에 t에 관하여 미분하여

$[\frac{d\theta}{dt}]_{t=20}$의 값을 구한다.

③ 수학적 결과 (분석)

$$\sec^2\theta \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{40}\left(\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}\right)$$

$t = 20$ 이므로 $x = 60,\ y = 40$이고 $\tan\theta = \frac{5}{2}$이다

$$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta = 1 + \frac{25}{4} = \frac{29}{4}$$

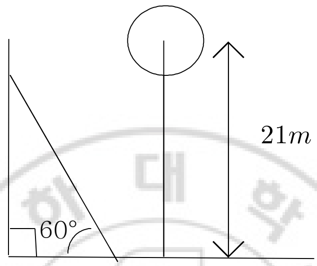
$$\therefore [\frac{d\theta}{dt}]_{t=20} = \frac{1}{40}(3+4)\frac{4}{29} = \frac{7}{290}$$

④ 결론, 예측

갑이 출발한지 20초가 되는 순간의 θ의 변화율은 $\frac{7}{290}$라디안/초이다.

[문제]

그림과 같이 평편한 바닥에 60°로 기울어진 경사면과 반지름 길이가 0.5m인 공이 있다. 이공의 중심은 경사면과 바닥이 만나는 점에서 수직으로 높이가 21m인 위치에 있다.



이 공을 자유낙하 시킬 때 t초 후 공의 중심의 높이 $h(t)$는

$h(t) = 21 - 5t^2 \ (m)$

라고 한다. 공이 경사면과 처음으로 충돌하는 순간, 공의 속도는?
(단, 경사면의 두께와 공기의 저항은 무시한다.) ([14])

① $-20m/$초　　② $-17m/$초　　③ $-15m/$초
④ $-12m/$초　　⑤ $-10m/$초

[풀이]

① 실세계 문제 상황 설정 (단순화/ 형식화)

- 주어진 것 : 공의 자유 낙하시킬 때 t초 후의 공의 중심의 높이 $h(t) = 21 - 5t^2$
- 구하는 것 : 60°로 기울어진 경사면과 반지름 0.5m인 공이 만나는 순간의 속도

② 수학적 모델 설정(수학화)

다음 그림과 같이 공이 경사면과 처음으로 충돌하는 순간의 공의 중심의 높이를 x라 하자. $\sin 30^\circ = \frac{0.5}{x} = \frac{1}{2}$

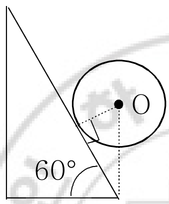
$\therefore x = 1$

이 순간을 t라고 하면 $21 - 5t^2 = 1$　　　$\therefore t = \pm 2$

즉, $t = 2$일 때 공과 경사면이 만난다.

$[\frac{dh}{dt}]_{t=2}$를 구하면 된다.

$h(t) = 21 - 5t^2$



③ 수학적 결과 (분석)

$h(t) = 21 - 5t^2$을 t에 대해서 미분하면 $\frac{dh}{dt} = -10t$ 이므로

$[\frac{dh}{dt}]_{t=2} = -10 \times 2 = -20$

④ 결론, 예측 (판단, 적용, 타당화)

경사면과 공이 충돌하는 시각은 2초로 공의 속도는 $-20m$/초이다.

[문제]

수면 위 $15m$ 높이의 부두에서 매초 $2m$의 속력으로 배를 끌어당기고 있다. 줄의 길이가 $25m$일 때, 배의 속력을 구하여라. (단, 배의 높이는 무시한다.) ([13])

[풀이]

① 실세계 문제 상황 설정 (단순화/형식화)

- 주어진 것 : 수면 위의 높이 $15m$, 끌어당기는 속력 $2m/$초
- 구하는 것 : 줄의 길이가 $25m$일 때의 배의 속력

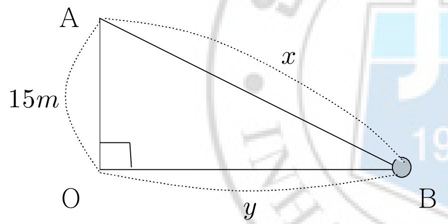
② 수학적 모델 설정 (수학화)

배를 끌어 당기는 부두의 위치를 A라고 하고, 부두 바로 아래의 지점을 O이라 하고, 배의 위치를 B라고 하자. 수면 위의 부두의 높이는 $15m$이고, $\overline{AO}=x$, $\overline{BO}=y$라 하자.

배를 매초 $2m$의 속력으로 끌어당기고 있으므로 $\dfrac{dx}{dt}=2$이다.

이 때, $x^2=15^2+y^2$ 이고,

$x=25$일 때의 $\dfrac{dy}{dt}$를 구해야 한다.



③ 수학적 결과 (분석)

$x^2=15^2+y^2$에서 $x=25$ 이므로 $25^2=15^2+y^2$이다. 따라서 $y=20$이다.

$x^2=15^2+y^2$를 t에 대해서 미분하면

$$2x\frac{dx}{dt}=2y\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{x}{y}\cdot\frac{dx}{dt}=\frac{25}{20}\cdot 2=2.5$$

④ 결론, 예측 (판단, 적용, 타당화)

줄의 길이가 $25m$일 때 배의 속력은 $2.5m/$초이다.

[문제]

조약돌을 잔잔한 수면에 던지면 동심원의 파문이 생긴다. 가장 바깥쪽 파문의 반지름의 길이가 매초 $0.5m$씩 커진다고 할 때, 다음 물음에 답하여라. ([11])

(1) 조약돌이 수면에 닿은 지 t초 후의 가장 바깥쪽 파문의 반지름의 길이 $r(t)$를 구하여라.

(2) 합성함수의 미분법을 이용하여, $t=3$일 때 가장 바깥쪽 파문의 넓이 $S(t)$의 변화율을 구하여라.

[풀이]

① 실세계 현상 (문제의 단순화)

- 주어진 것 : 바깥쪽 파문의 반지름 길이의 변화율 = $0.5m/s$
- 구하는 것 : 조약돌이 수면에 닿을 때의 바깥쪽 파문의 반지름의 길이, 조약돌을 던진 3초 후의 바깥 쪽 파문의 넓이의 변화율

② 수학적 모델 설정

t초 후의 바깥쪽 파문의 반지름의 길이를 rcm, 넓이를 Scm^2이라 하면, 바깥 족 파문의 반지름의 길이 변화율이 $0.5m/s$이므로 $r=0.5t$ 이다.

$S=\pi r^2=\pi(0.5t^2)=0.25\pi t^2$ 이고, $t=3$일 때의 바깥쪽 파문의 넓이의 변화율을 구하려면 $[\frac{dS}{dt}]_{t=3}$의 값을 구해야 한다.

③ 수학적 결과 (분석)

S를 t로 미분하면 $\frac{dS}{dt}=0.5\pi t$이고, $[\frac{dS}{dt}]_{t=3}=[0.5\pi t]_{t=3}=1.5\pi\ (m^2/s)$

④ 결론, 예측 (판단, 적용, 타당화)

조약돌을 던졌을 때의 바깥쪽의 파문의 반지름은 $r(t)=0.5t\ (m)$이고, 던진 지 3초가 후의 바깥쪽 파문의 넓이의 변화율은 $1.5\pi\ (m^2/s)$이다.

[문제]

실험실에서 어떤 미생물을 배양한 지 x시간 후의 개체수를 y마리라고 하면

$y = c_1 2^{c_2 x}$ (단, c_1, c_2는 상수)

의 관계식이 성립한다. $x = 20$일 때, 개체수 y의 변화율을 구하여라. ([11])

[풀이]

① 실세계 현상 (문제의 단순화)

- 주어진 것 : 미생물을 배양한 지 x시간 후의 개체수는 $y = c_1 2^{c_2 x}$
- 구하는 것 : 20시간이 지난 후의 개체수의 변화율

② 수학적 모델 설정

20초 뒤의 개체수 y의 변화율을 구하기 위해서는 $[\frac{dy}{dx}]_{x=20}$를 구해야 한다.

③ 수학적 문제 풀이 (분석)

$\frac{dy}{dx} = c_1 c_2 2^{c_2 x} \ln 2$이고

$[\frac{dy}{dx}]_{x=20} = [c_1 c_2 2^{c_2 x} \ln 2]_{x=20} = c_1 c_2 2^{20 c_2} \ln 2$

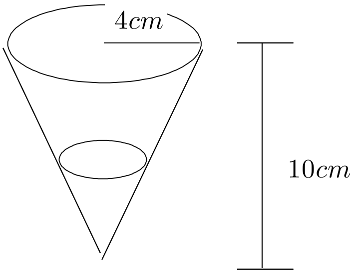
④ 결론, 예측 (판단, 적용, 타당화)

미생물을 배양한 지 20시간이 지난 뒤 개체수의 변화율은 $c_1 c_2 2^{20 c_2} \ln 2$이다.

[문제]

아래 그림과 같이 윗면의 반지름의 길이가 $4cm$, 높이가 $10cm$인 직원뿔 모양의 용기에 매초 $4cm^3$의 주스를 넣는다고 한다. 주스 면의 높이

가 5cm일 때, 주스 면의 상승 속도를 구하여라. ([11])



[풀이]

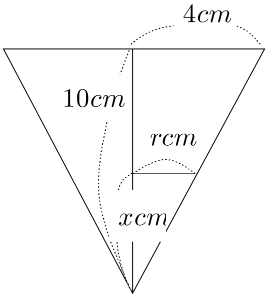
① 실세계 현상 (문제의 단순화/ 형식화)

- 주어진 것 : 주스를 담는 용기의 반지름 4cm, 높이 10cm, 용기를 주스로 채우는 속도 $4cm^2/s$
- 구하는 것 : 높이가 5cm일 때의 주스면의 상승 속도

② 수학적 모델

주스의 면의 높이를 xcm일 때, 윗면의 반지름의 길이를 rcm, 주스의 부피를 Vcm^3라고 하면 $10:4=x:r$에서 $r=\dfrac{2}{5}x$이므로

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 x=\frac{4}{75}\pi x^3$$



③ 수학적 결론

V를 t로 미분하면 $\dfrac{dV}{dt}=4\ (cm^3/s)$이므로 $x=5$일 때의 상승 속도는

$4 = \frac{4}{25}\pi \cdot 5^2 \cdot \frac{dx}{dt}$ 이다. $\therefore \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\pi}\,(cm/s)$

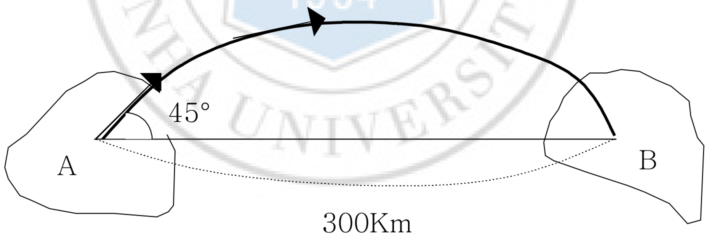
④ 결론, 예측 (판단, 적용, 타당화)

따라서 매초 $4cm^3/s$로 주스를 채울 때, 주스의 높이가 $5cm$가 되는 순간의 주스의 상승 속도는 $\frac{1}{\pi}\,(cm/s)$이다.

2) 최적화에 관련된 실생활 문제 해결을 위한 수학적 모델링

[문제]

다음 그림과 같이 잔잔한 바다 위의 A지점에서 해수면과 45°의 각을 이루는 방향으로 쏘아 올린 미사일이 포물선을 그리면서 A지점으로부터 300Km거리에 있는 B지점에 떨어졌다고 한다. 미사일이 올라간 해수면으로부터의 최고의 높이를 구하라. ([10])



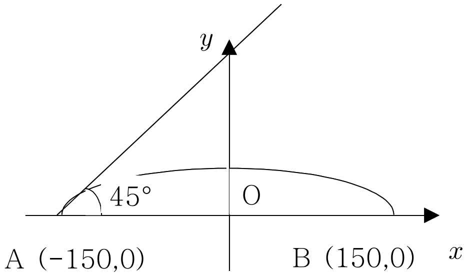
[풀이]

① 실세계 현상 (문제의 단순화)

- 주어진 것 : 미사일의 시작 지점과 끝 지점의 거리는 300Km, 미사일의 쏘아올린 각도 45°

- 구하는 것 : 미사일의 최고의 높이

② 수학적 모델 설정



미사일이 그리는 포물선의 자취를 좌표평면으로 바꾸어 x축 위에 포물선 방정식을 세운다. A지점을 (-150,0)이라 하고, B지점을 (150,0)이라 한다.

A, B를 지나면서 높이를 나타내는 포물선의 방정식은

$y = a(x+150)(x-150)$

이 때, A에서의 접선의 기울기는 tan45˚ =1이다.

이를 통해서 y의 최댓값을 구한다.

③ 수학적 결과 (분석)

$y' = 2ax$에서 $x = -150$일 때 $-300a = 1$이므로

$a = -\dfrac{1}{300}$ $\quad \therefore y = -\dfrac{1}{300}(x^2 - 150^2)$

따라서 $x = 0$일 때 y는 최댓값을 가진다.

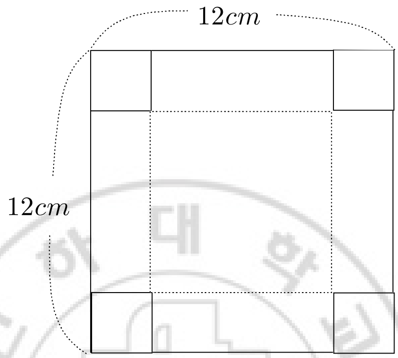
$\therefore y = \dfrac{150^2}{300} = 75$

④ 결론, 예측 (판단, 적용, 타당화)

따라서 미사일이 해수면으로부터 최고로 올라가 높이는 75Km이다.

[문제]

한 변의 길이가 $12cm$인 정사각형의 종이가 있다. 네 모퉁이에서 크기가 같은 정사각형을 잘라내고 남는 부분을 접어서 상자를 만들려고 한다. 이때, 상자의 부피를 최대로 하려면 잘래내는 부분의 한 변의 길이를 얼마로 하면 되겠는가? ([10])



[풀이]

① 실세계 현상 (문제의 단순화)

- 주어진 것 : 한 변의 길이가 $12cm$일 정사각형의 종이
- 구하는 것 : 상자의 부피를 최대로 하는 잘라내는 변의 길이

② 수학적 모델 설정

정사각형 모양의 종이에서 네 모퉁이에서 한 변의 길이를 x이라 하자. 상자의 부피를 $f(x)$라고 하면

$$f(x) = x(12-2x)(12-2x) = 4(x^3 - 12x^2 + 36x)$$

$f(x)$의 극댓값을 이용해서 $f(x)$의 최댓값을 구할 수 있다.

③ 수학적 결과 (분석)

$$f'(x) = 4(3x^2 - 24x + 36) = 12(x^2 - 8x + 12) = 12(x-6)(x-2)$$

$x=6$ 또는 $x=2$는 $f'(x)=0$이다. $f(x)$의 증가, 감소를 증감표를 통해 보

자.

x	$\cdots$	$x=2$	$\cdots$	$x=6$	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	128	↘	0	↗

$0<x<6$이므로 구간에서 $f(x)$는 $x=2$에서 극대이다.

④ 결론, 예측 (판단, 적용, 타당화)

$f(x)$는 $x=2$에서 극댓값과 동시에 최댓값을 갖는다.

따라서 이상자의 부피가 최대가 되게 하는 한 변의 길이는 $2cm$이다.

[문제]

다음은 바닷가에서 하루 동안 측정한 바닷물의 깊이를 나타낸 식이다.

$$h(t)=2+\cos\frac{\pi t}{6}\ (0\le t<24)$$

위의 식에서 t는 자정을 기준으로 경과한 시간을 나타내며, $h(t)$는 각 시각에 측정한 바닷물의 깊이를 나타낸다. 예를 들어, $h(0)$은 자정에 측정한 바닷물의 깊이, $h(12)$는 정오에 측정한 바닷물의 깊이를 나타낸다. 바닷물의 깊이의 극댓값과 극솟값을 구하라. ([9])

[풀이]

① 실세계 현상 (문제의 단순화)

- 주어진 것 : 시간에 따른 바닷물 깊이를 나타낸 식 $h(t)=2+\cos\frac{\pi t}{6}$

- 구하는 것 : 바닷물의 깊이의 극댓값과 극솟값

② 수학적 모델 설정

바닷물의 깊이를 시간에 따른 식으로 나타내면 $h(t)=2+\cos\frac{\pi t}{6}$ 이다.

$h(t)$ t에 대해 미분하면 $h'(t)=-\frac{\pi}{6}sin\frac{\pi t}{6}$

③ 수학적 결과 (분석)

$h'(t)=-\frac{\pi}{6}sin\frac{\pi t}{6}$

$h'(t)=0$ 일 때, $t=0, 6, 12, 18$

$h''(t)=-\frac{\pi^2}{36}cos\frac{\pi t}{6}$

$h(t)$의 증가, 감소를 증감표를 통해 보자.

t	⋯	0	⋯	6	⋯	12	⋯	18	⋯
$h'(t)$	+	0	−	0	+	0	−	0	+
$h''(t)$		−		+		−		+	
$h(t)$	↗	3	↘	1	↗	3	↘	1	↗

$t=0, 12$ 일 때 극댓값 3을 가지고, $t=6, 18$ 일 때 극솟값 1을 가진다.

④ 결론, 예측 (판단, 적용, 타당화)

따라서 자정과 정오에 바닷물의 깊이가 극댓값인 3이고, 6시와 18시에 바닷물의 깊이가 극솟값인 1이다.

[문제]

철판으로 부피가 2π 인 원기둥 모양의 물탱크를 만들려고 한다. 사용하는 철판의 넓이와 제작비용이 비례할 때, 제작비용이 최소가 되는 경우의 밑면의 반지름의 길이와 높이를 구하라. ([11])

[풀이]

① 실세계 현상 (문제의 단순화)

- 주어진 것 : 부피가 2π 인 원기둥 모양의 물탱크

- 구하는 것 : 철판의 넓이를 가장 적게 쓰도록 하는 원기둥의 밑면의 반지름 길이와 높이

② 수학적 모델 설정

밑면의 반지름의 길이를 x, 높이를 h라 하면

$\pi x^2 h = 2\pi \quad \therefore h = \dfrac{2}{x^2}$ 겉넓이를 $f(x)$라고 하자.

$$f(x) = 2\pi x^2 + 2\pi x h = 2\pi(x^2 + \frac{2}{x})$$

③ 수학적 결과 (분석)

$f(x)$를 미분하면 $f'(t) = 2\pi(2x - \dfrac{2}{x^2}) = 4\pi \bullet \dfrac{x^3-1}{x^2}$

$f'(x)$를 미분하면 $f''(x) = 4\pi\left(1 + \dfrac{2}{x^3}\right)$이다.

$f'(x) = 0$에서 $x = 1$이다. $f(x)$의 증가와 감소를 증감표를 통해 보자.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		-	0	+
$f''(x)$		+	+	+
$f(x)$		↘	2	↗

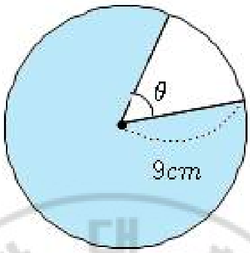
따라서 $f(x)$는 $x = 1$일 때 극솟값 2를 갖는다.

④ 결론, 예측 (판단, 적용, 타당화)

밑면의 반지름의 길이가 1이고, 높이가 2일 때 제작비용이 최소가 된다.

[문제]

다음 그림과 같이 반지름의 길이가 $9cm$인 원 모양의 종이에서 중심각의 크기가 θ인 부채꼴을 잘라내고 남은 부분으로 원뿔을 만들어 아이스크림을 담는 그릇을 만들려고 한다. 가장 많이 담으려면 θ가 몇 라디안이 되게 잘라내야 하는가? ([13])



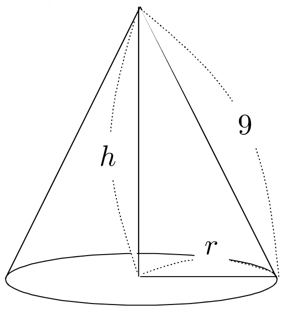
[풀이]

① 실세계 현상 (문제의 단순화)

- 주어진 것 : 반지름 길이가 $9cm$인 종이로 원뿔 모양의 아이스크림 그릇
- 구하는 것 : 아이스크림을 가장 많이 담을 수 있는 라디안

② 수학적 모델 설정

부채꼴 모양의 종이로 만든 원뿔의 밑면의 반지름 길이를 r, 높이를 r이라 하자.



$2\pi\times 9-9\theta=2\pi r,\quad r^2+h^2=9$

이 원뿔의 부피를 V라고 하자.

$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{1}{3}\pi(81-h^2)h=27\pi-\frac{1}{3}\pi h^3$ (단, $0<h<9$)

③ 수학적 결과 (분석)

V를 미분하면 $\frac{dV}{dh}=27\pi-\pi h^2=\pi(3\sqrt{3}-h)(3\sqrt{3}+h)$

$V'(h)=0$ 일 때, $h=3\sqrt{3}$ 또는 $h=-3\sqrt{3}$ 이다.

그런데 $0<h<9$이므로, $V'(h)=0$ 일 때, $h=3\sqrt{3}$이다.

$V(h)$의 증가와 감소를 증감표를 통해 보자.

h	0	$\cdots$	$3\sqrt{3}$	$\cdots$
$V'(h)$	27π	+	0	-
$V(h)$	0	↗	$27\sqrt{3}\pi$ (극댓값)	↘

따라서 $V(h)$는 $h=3\sqrt{3}$일 때 극댓값이고 최댓값 $27\sqrt{3}\pi$를 갖는다.

$h=3\sqrt{3}$일 때 $r^2+h^2=9^2$이므로 $r=3\sqrt{6}$

$2\pi\times 9-9\theta=2\pi\times 3\sqrt{6}$

$\therefore \theta=\frac{2(3-\sqrt{6})\pi}{3}$

④ 결론, 예측 (판단, 적용, 타당화)

따라서 아이스크림을 가장 많이 담으려면 $\theta=\frac{2(3-\sqrt{6})\pi}{3}$(라디안) 되도록 자르면 된다.

Ⅳ. 결　론

본 연구에서는 학생들이 어려워하는 미분 과정을 수학적 모델링을 통한 문제해결전략을 소개하였다. 그 중에서도 변화율에 관련된 문제와 최적화에 관련된 문제를 해결함으로서 좀 더 체계적인 문제해결전략을 제시하도록 노력했다. 다양한 실생활문제를 해결하므로 실생활문제에 대한 거부감이나 어려움을 해소하도록 고등학교 교과서에 제시된 실생활 문제를 중심으로 하였다.

학생들 대부분은 이러한 실생활 문제를 기피하는 경우가 대부분이다. 지문의 길이가 길어 문제풀이에 대한 거부감이 들고 문제를 해결해야 할 식이 주어지지 않아 부담감이 생기는 것이다. 결국 이에 문제를 포기하는 결과가 나타나는 것이다. 따라서 이런 문제점을 해결하기 위해서 구체적인 해결방안 중 하나인 수학적 모델링을 접목시킨 것이다.

수학적 모델링 중 하나인 NCTM의 수학적 모델링 과정을 도입하였다. 실세계 현상을 단순화 시키고 문제에 끼치는 영향을 찾아내고 이를 수학적 모델링으로 표현한 뒤 수학적으로 분석하고 이들을 통해 결론을 이끌어 내는 것이다.

미분의 실생활 문제 언급은 학생들이 미분에 대한 중요성을 깨달고, 다양한 분야 접하게 되어 미분 문제 해결에 대한 어려움을 해소하는 것에 있다.

따라서 본 연구를 통해 실생활문제를 가르치기 위한 효율적인 지도방안을 계획하는데 조금이나마 도움이 되었으면 한다.

2. 제언

본 연구는 NCTM의 수학적 모델링 과정을 바탕으로 문제해결방안을 제시하였다. 따라서 다음과 같은 후속연구가 뒤따라야 한다고 생각한다.

첫째, 실제 학생들을 대상으로 실생활문제 해결을 수학적 모델링 통하여 해결함으로 얻을 수 있는 효과에 대하여 비교 연구할 필요가 있다. 그로 인해 본 연구의 제약점들을 보충 할 수 있을 것이다.

둘째, 기존에 있는 실생활 문제의 종류가 다양하지 못하다. 좀 더 실생활 문제에 대한 연구가 필요하다.

셋째, 본 연구에서는 NCTM의 수학적 모델링을 바탕으로 연구했다. 현재 다양한 수학적 모델링 과정인 존재하므로 문제에 따라 다양하게 적용하는 연구가 잇따르면 좀 더 효과적인 해결전략이 될 것이라 생각한다.

참 고 문 헌

[1] 교육부. 고등학교 교육과정 해설서 -⑤수학- . 2001

[2] 교육부. 수학과 교육과정. 고시 제 2007 – 79호 [별책8]

[3] 김수미. 중등학교 수학적 모델링에 관한 고찰. 서울대학교 대학원 석사학위 논문. 1993

[4] 박규홍. 고등학교 미분과 적분. (주)교학사. 2002

[5] 박규홍. 고등학교 수학 Ⅱ. (주)교학사. 2002

[6] 박혜향. 수학교육론 이야기. 2008

[7] 손현정. 문제해결력을 위한 수학적 모델링 활용에 관한 학습-지도 방안 연구 : 함수단원을 중심으로. 창원대학교 교육대학원 석사 학위 논문. 2009

[8]송혜진. 고등학교 미분 단원에서의 실생활 문제 해결에 관한 연구 -수학적 모델링의 관점에서-. 경희대학교 교육대학원 석사 학위 논문. 2009

[9] 우정호 외 5인. 고등학교 미분과 적분. 대한교과서(주). 2002

[10] 우정호 외 5인. 고등학교 수학 Ⅱ, 대한교과서(주). 2002

[11] 이강섭 외 3인. 고등학교 수학 Ⅱ. 지학사. 2009

[12] 이준경. 수학적 모델링을 활용한 문제해결 향사에 관한 연구 -7-가 함수단원을 중심으로-. 동국대학교 교육대학원 석사학위 논문. 2008

[13] 최봉대 외 5인. 고등학교 미분과 적분. (주) 중앙진흥연구소

[14] 한국교육과정평가원. 대수능 모의평가. 2008

[15] 한국교육과정평가원. 대학수학능력시험. 2006

Abstract

A Study on teaching of the derivative through mathematical modeling on real-life problems

The derivative can be applied to various fields of study besides Mathematics. It plays a key role in a lot of area including natural sciences, social sciences and especially economics. Thus it is required to be fully understood since differentiation is closely linked to real life. Also, it is suggested that real-life problems should to be introduced in school in order to make differentiation intimate and accessible to students who have difficulty in solving differential problems.

In 7th Educational Reform Curriculum, it is focused on solutions through Mathematical Modeling of a variety of Real-life. Therefore, for the purpose of this study, it suggests a teaching plan to solve real-life problems focused on Mathematical Modeling of NCTM. By analyzing the rate of change of differentiation and optimization and solving diverse problems centered on that, we provide in this dissertation teaching plans to help students effectively and solve problems without difficulty.