教育學碩士學位請求論文

수학학습 흥미 유발을 위한 수학사 및 실생활문제 -고등학교 삼각함수 중심으로-

A study on history of mathematics and real life problems for interesting mathematics classes
-Focused on the trigonometric function-

2009年 2月

仁荷大學校 教育大學院

數學教育專攻

徐慶珍

教育學碩士學位請求論文

수학학습 흥미 유발을 위한 수학사 및 실생활문제 -고등학교 삼각함수 중심으로-

A study on history of mathematics and real life problems for interesting mathematics classes
-Focused on the trigonometric function-

2009年 2月

指導敎授 李 鍾 成

본 論文을 徐慶珍의 碩士學位 論文으로 認准함

2009年 2月

主審 (印)

副審 (印)

副審 (印)

▣ 목 차 ▣

국문초록

본 논문에서는 수학 내용을 보다 의미 있고 능동적으로 학습할 수 있게 해주고, 수학에 대한 올바른 인식과 태도, 수학 학습에 대한 흥미와 동기를 유발 시켜줄 수 있는 수학사와 실생활을 적용하여 현장학습에 응용할 수 있는 이론적 배경을 고찰하였다.

특별히 고등학교 과정의 삼각함수 단원 중심으로 역사적 배경을 알아보고, 수학사와 실생활에 활용된 삼각함수에 대해 조사 정리하였으며, 그와 관련된 문제를 제시하고 교수 학습 시 이용하도록 하였다.

Abstract

History of mathematics may be helpful to understand contents of mathematics more meaningful and let students study with positive mind. Futhermore some word problems which are related to real life could be useful to understand some mathematical concepts and applicable in many areas of our life. In this dissertation we study the theoretical background of the fact which is history of mathematics and word problems make students more concerned in mathematics and motivate to study mathematics.

Indeed, we study the historical background of trigonometric functions in high school mathematics curriculum, we examined and reviewed some properties of trigonometric functions which could be applicable in our life. We also provide lots of problems related to these topics which can be useful in mathematics class hour.

Ⅰ. 서 론

1. 연구의 필요성 및 목적

학교에서 많은 학생들이 수학 과목에 대해 어렵고 힘든 과목으로 생각하고 있다. 그리고 수학을 흥미가 있어서 적극적으로 공부하는 것이 아니라 시험의 도구로 인식하고 있으며 고등학생의 경우 대학입시를 위해 문제 풀이의 숙달을 배우고 익히는 것이 현실이다. 수학의 목표에는 인지적 영역과 정의적 영역이 포함되어 있지만 인지적 영역에만 주안점을 두고 있어 수학적 태도와 흥미 등을 유발시키기 위한 정의적 영역은 소홀히 다루어지고 있다.

J. Dewey 는 여러 가지 흥미 중에 교육적인 의미로써 흥미란 학생과 학습 자료와의 관계에서 학생들의 학습활동을 유발하고 지속시키는 원천적인 역할을 한다고 보고, 교수 학습이나 진도 지도와 같은 교육의 과정에 흥미의 개념은 중시되어야 하며, 교사는 학생들의 능력뿐만 아니라 흥미에 관한 정보도 가지고 있어야 한다고 주장하였다.

학교 교육 속에서 학생들에게 수학을 배우는 동안만이라도 수학의 가치와 매력을 경험시켜줌으로써 수학에 흥미와 관심을 갖도록 해준다면 수학 학습하는데 있어서 지금보다는 능동적으로 학습할 수 있게 될 것이다.

수학 학습에서 학생들에게 수학사 및 그와 관련된 예화자료가 흥미를 불러 일으킬 수 있다는 연구 내용 살펴보면 다음과 같다.

Getzels는 '흥미란 개인으로 하여금 주의 또는 획득을 위해 어떤 특정한 대상물, 활동, 이해, 기술 또는 목표를 추구하도록 충동해 주는 경험을 통하여 조직된 성향이다.' 라고 정의하고 있다. 일반적으로 흥미는 높은 강도를 가지는 정의적 특성이며, 사람들로 하여금 어떤 것을 추구하도록 하는데, '어떤 것'이 바로 흥미의 대상이 된다. 흥미는 행동 지향적이기 때문에 이들 대상은 대상물 또는 이해보다 활동 또는 기술이 될 경우가 많으며 이것의 방향은 '흥미 있는 흥미 없는'이라는 말로써 나타낼 수 있고, 흥미의 강도는 바로 이 두 단어 사이에 존재한다고 볼 수 있다. 또한 흥미는 Getzels가 지적한 것처럼 학습된 것이며 학습을 통하여 조직되는 것이다.

Tyler는 학업에 있어서 흥미는 학업을 위한 긍정적인 동기를 제공해 줄 뿐만 아니라 대부분의 학교에서는 학생들로 하여금 여러 학습영역에서 흥미를 발달시키도록 돕고 있다. 또 학습이 학습자의 진정한 흥미에 의해서가 아니라 어떤 강요에 의해 행해진다면 그것은 비록 효과적일지 지라도 비교적 비효율적이다 라고 말하고 있다. 즉 학습자가 학습을 효과적으로 그리고 효율적으로 하기 위해서는 학습자는 그들이 배워야 할 학습에 흥미를 가지고 있어야 한다는 것이다. [13]

학생들이 수학 내용을 보다 의미 있게 학습할 수 있도록 수학에 대한 올바른 인식과 태도, 수학 학습에 대한 흥미와 동기를 유발시키기 위해서는 수학의 역사적 배경이나 우리의 실생활과 관련이 깊은 여러 가지 형태의 문제를 활용하는 것이다.

그러나 수학의 교과서에는 단원과 관련된 수학사적 내용과 실생활 문제들을 담고 있긴 하지만 실제로 수업시간에 제대로 다루어지지 않고 있어 학생들에게 도움이 되지 못하고 있다.

본 연구는 학생 스스로 왜 수학을 공부해야 하는가에 대해서 명확한 인식을 갖도록 수학학습에 대한 흥미와 동기 유발에 목적이 있다.

수학사는 수학의 필요성을 알게 하고 강조함으로써 수학 수업에서 학습동기와 의욕을 높일 수 있다. 수학의 개념과 원리를 발견 과정으로부터 이해하도록 하기에 학생들은 어렵게만 생각하는 수학 과목의 여러 가지 내용을 쉽게 파악하며 응용해 나갈 수 있으며 자신감을 점차적으로 형성하게 된다. 그리고 학생들이 수학적 힘과 유용성을 인식할 수 있는 자기 주변의 생활 관련 문제를 다양한 방식으로 해결하는 경험을 함으로써 긍정적인 수학적 신념과 학습태도가 형성될 수 있을 것이다.

2. 연구의 내용 및 방법

학교수학의 중요한 단계인 함수는 실생활에서 다른 교과와의 관련성이 많은 단원임에도 불구하고 학습에 심한 거부감과 어려움을 호소하고 있다. 다른 단원보다 흥미가 낮은 편이어서 단원에 대한 내용을 충분히 이해하지 못하고 있다.

이에 본 연구는 삼각함수단원을 선택하여 수학사의 도입을 통해 학생들의 흥미를 갖고, 학습 동기를 유발할 수 있으며, 실생활과 관련된 문제를 통해서 효율적으로 지도할 수 있는 자료를 제시하고자 하는 것으로 구체적인 내용은 다음과 같다.

첫째, 여러 가지 문헌을 통해서 수학교육과 수학사, 실생활에 대한 이론적 배경을 고찰한다.

둘째, 고등학교 과정의 삼각함수 단원에 대하여 용어의 역사, 역사적 배경, 수학자 및 예화를 알아본다.

셋째, 삼각함수 단원의 내용과 목표, 삼각법의 규준에 대해 알아본다.

넷째, 수학사와 실생활을 활용한 삼각함수에 대해 조사, 정리하고 그와 관련된 문제를 제안한다.

Ⅱ. 본　　론

1. 수학교육과 수학사

1) 수학교육과 수학사에 대한 견해

오늘날의 수학이 어떻게, 어떠한 필요성에 의하여 형성 되었는가를 아는 것 자체가 수학이 인간의 위대한 문화적 유산임을 깨닫게 하는 데 있어 가치가 있을 뿐 아니라 학생들의 수학에 대한 긍정적인 태도 변화와 수학에 대한 본질을 이해하고 수학적 사고를 유발시켜 나가는데 기여한다.

수학사를 수학 교육 과정에 포함시키는 것은 수학에 대한 태도, 사고의 증진, 수학적 지식의 본질에 대한 이해 면에서 학생과 교사 모두에게 도움을 줄 수 있다. Polya,1965에서는 '발생적 원리'라 하여 인간의 정신적 진화의 발자취를 되짚어 보는 방법의 중요성을 제시하였는데, 이러한 발생적 수학을 이해한다는 것은 수학의 귀납적 논리 체계를 이해하는 것과 연관이 있기 때문이다. 또한 학습 방법론적 측면에서도 인류가 지식을 어떻게 형성해 나아갔는가를 이해하는 것은 학생들이 어떻게 지식을 습득해 나아가는 가를 이해하는 데 도움이 될 수 있다.

Abraham Arcavi는 수학사와 수학교육이 합쳐져야 할 이유를 관한 여러 학자들의 견해를 다음과 같이 요약하였다.

첫째, '개체 발생은 계종 발생을 반복한다.' 즉, 역사적 발전과 개념에 관한 인간 사고의 발전 사이에 있을 법한 유사성이 수학을 배우는 과정에 어떤 빛을 던질 수 있을 것이다.

둘째, 역사는 수학의 주체들의 이해를 돕는데 기여할 수 있다.

셋째, 역사는 수학이 역동적이며 살아있는 문야라는 옳은 이미지, 즉, 수학내의 각 분야가 서로 관련되어 있으며 또한 다른 분야와도 연관되어 있는 역동적인 분야라는 이미지를 창조하는데 기여할 수 있다.

넷째, 역사는 동기와 관심의 원천으로써, 혹은 과거에 관한 자연스런 호기심에 대

한 대답으로써, 또는 학생들의 자신감을 강화시키는데 기여함으로써, 혹은 단순히 즐기는 것의 원천으로써 도움을 줄 수 있다. ([14])

고호경(2004)은 학교 교육 과정에 수학사를 도입하는 이유를 크게 세가지로 보고 있다.

첫째, 학생의 사고 발달을 도우며 학생을 이해할 수 있다.

둘째, 수학사는 학생들에게 긍정적 학습 태도 발달을 위한 동기부여를 해 줄 수 있다.

셋째, 수학사를 통해 수학지식의 인간적·사회문화적 측면을 경험할 수 있다. ([1])

2) 수학사 지도의 필요성과 기대효과

수학사는 수학사의 필요성을 알게 하고 강조함으로써 수학 수업에 학습 동기와 의욕을 높일 수 있다. 또한 학습에서 흥미를 유발시켜 학습 효과를 높이고, 수학의 발견과 정을 이해시키고, 수학의 개념과 원리를 이해하고, 자신감을 준다.

교수의 도구로서의 수학사는(NCTM, 1989)학생들이 수학사를 통해서 '왜'를 이해하도록 하여 수학의 본질, 역할, 매력 들을 가르쳐 줌으로써 수학의 발명과 발견의 짜릿함을 가질 수 있도록 하는 것은 영원히 추구해야 할 수학의 목표라고 말하였고, 수학의 역사에 대한 의식은 새로운 수학에 대한 그의 이용과 짝을 이루어 '왜'를 가르치는 수학 교사들에게 중요한 수단이 된다고 하였다.

수학사의 수학교육에 있어서의 필요성을 3가지 범주로 언급하였다.

첫째, 연대적 의미로 수학에 사용하고 있는 많은 용어, 단위 등에 대한 역사적 발생 배경을 알아봄으로써, 특정한 문제에 대한 이해뿐만 아니라. 학생들과 토의, 대화를 할 수 있는 단서를 제공하여 준다.

둘째, 논리적인 의미로는 수학의 역사가 논리와 별개인 것처럼 보일 수 있지만, 역사는 학생들의 논리적 통찰력을 발전시키는데 기여해 왔다. 어떤 주제를 증명하려고 할 때, 논리들이 다른 방식이 아닌 이런 식으로 연관되어 있는 가를 알고자 한다. 역사적 증명이 수학의 동기를 부여하면, 학생들이 문제에 처음 접하는 미숙한 상태에서 항상 자명한 이치에서부터 해결하려고 하는 방법에 동화된다. 수학에 대한 완전하고 규격화된 접근법보다는 발생학적인 원칙으로부터 더욱 많은 성공을 기

대할 수 있다고 하였다. 따라서 수학이란 학문도 오랜 세월을 거쳐 인간들의 재능에 의해서 많은 시행착오를 거쳐 이루어졌고, 수학이란 딱딱한 과목도 인간이 생활해 나가면서 필요에 의해서 계속 변천될 가능성을 갖고 있음을 알게 함으로써 학생들에게 수학에 대한 거부감을 어느 정도 해소해 주는 역학을 할 것이다.

셋째, 교육적 이유로는 수학에서 문제를 해결하는 데에는 처음부터 잘 다듬어진 지혜의 산물이 아니고, 오랜 경험과 사고를 통하여 다듬어져 발달해온 것이다. 그러므로 역사적인 아이디어는 교육적으로 동기가 부여된 과정을 선택하고 설명하는데 도움을 준다. 수학이 수학만으로서가 아닌 과학보다는 음악과 미술의 창조에 공헌하며 독창적인 창조에 의하여 수학의 자율성이 보장될 수 있다.수학사는 학생들의 통찰력을 기르고 흥미를 자극하며, 교사의 능력을 향상시키는데 도움을 준다. ([20])

허민(1997)은 수학사의 도입의 필요성과 기대효과를 다음과 같이 말하고 있다.

첫째, 수학의 유용성을 강조할 수 있다. 수학의 용도는 무엇인가? 수학을 연구하고 가르치는 어느 누구도 쉽게 대답할 수 없는 질문이다. 수학은 현대 과학기술에 절대적인 공헌을 했음에도 불구하고 수학의 유용성에 대한 구체적인 예를 학생들에게 제시하기 어렵다. 컴퓨터, CT촬영기 등의 제작에 고등 수학이 사용되고 있지만, 수학의 너무 깊은 곳에 '잠복'해 있기 때문에 수학을 '보여'줄 수도 없다. 그래서, 수학사를 통해 '수학은 필요에 의해 발생했다'는 점을 확신할 수 있다.

둘째, 수학은 발전하는 학문임을 인식시킬 수 있다. 교과서에 나타나는 완벽하게 형식화하고 체계화된 수학에 압도되어 더 이상의 변화와 발전 가능성을 상상하기 어렵다. 수업중 수학사의 도입은 수학이 계속해서 변해왔고 현재도 발전하고 있으며 앞으로도 더욱 발전할 것이라는 생각을 심어줄 수 있다. 그리고, 수학적 개념 자체도 변한다는 사실을 알려줄 필요가 있다.

셋째, 수학의 '인간화'를 도모할 수 있다. 현재의 수학은 인간의 엄청난 노력이 투여된 뒤에야 발견되었다. 전기와 일화의 사용은 역사를 더욱 현실감 있게 만들며, 수학자의 흥미로운 일화를 기억하게 되면 그들의 수학을 기억하는 더욱 좋은 기회를 갖게 된다.

넷째, 현대 수학을 좀 더 친밀하게 이해시킬 수 있다. 수학을 '잘'가르치기 위해서는 '정의-정리-증명'순서로 부드럽고 명확하게 제시하면 충분하고, 이렇게 하면 학생들은 잘 이해할 것이라고 생각한다. 그러나 이런 교수법을 효율적이지 못하고 수

학에 대한 거부감을 더욱 심화시킬수 있다. 그리고 수학 지식의 분명한 구조가 결여된 학생에게 더욱 큰 두려움을 줄 수 있고, 수학의 논리적 구조를 파악하는 데 실패한 학생은 수학 학습을 포기할수도 있다. 이런 경우에 수학사는 현대 수학의 구조에 대한 이해를 제공할 수 있다.

다섯째, 수학의 문화적 가치를 인식시킬 수 있다. 오랫동안 많은 사람들의 노력의 결과로 누적된 수학은 현대 문명 사회에 막대한 영향을 끼친 거대한 분야로 발전되었다. 수학 교사는 수학이라는 인류 문화의 전달자이면, 이런 문화를 학생들에게 전달하는 것은 교사의 책임이다.

여섯째, 수학 학습의 어려움을 이해할 수 있다. 현대 우리가 가르치고 배우는 수학은 인류의 역사에 비하면 매우 최신의 지식이며, 수천 년 동안 인류의 시행착오와 끊임없는 노력의 결과로 현재의 수학이 존재하고 있다.
짧은 시간 내에 많은 수학을 배워야하는 학생에게 어려움이 될 수 있다. 그래서 수학 개념 발달의 장애를 보여주는 역사적 조망이 교사로 하여금 학생의 오류를 더욱 잘 이해할 수 있도록 도와 줄 것이다.

일곱째, 교수 방법을 개선시킬 수 있다. 역사에서 발생했던 것과 유사하게 특별한 예로부터 이론적인 일반화로 이동하는 교육이 학생으로 하여금 더 높은 수준으로의 도약을 가능하게 만든다고 믿고 있다. 증명을 전달하는 좋은 방법은 먼저 예를 제시하고 증명을 직관적으로 파악하게 한 다음 엄밀한 증명을 제시하는 것이다.

여덟째, 수학에 대한 흥미를 유도할 수 있다. 수학 교육의 목표에서 수학에 대한 흥미와 긍정적인 자세가 없다면 지적인 영역의 목표를 달성할 수 없다. 수학의 '인간화'를 위해 수학자의 일화를 이용했듯이, 수업중 간단한 역사적 사실과 일화를 소개함으로써 학생들의 흥미를 유발시킬 수 있다. 그리고, 일상적인 문제를 제시하면서고 그것이 오래 전에 고려되었음을 지적하면 학생들의 관심을 더욱 유도할 수 있을 것이다. ([18])

3) 수학사의 활용방안

수학의 역사에서 수학적 개념의 발생과 그 발달 과정을 고찰하여 학생들이 보다 잘 이해 할 수 있도록 교재를 구성하여 수학학습에서 활용하여야한다. 수학은 다양

한 사함들이 배울 수 있는 보편성과 수월성의 교과이며, 수학을 배울 때 수학적 지식은 전수 받는 것이 아니고 자신의 지식과 탐구로 새로운 지식을 스스로 구성하여 배우게 된다는 것이다.

정동권(1998)은 수학교실에서 수학사를 활용하는 입장을 다음과 같이 요약하여 제시하고 있다.

첫째, 수학사적 인물이나 에피소드에 관한 것, 기호나 용어에 관한 것, 수학의 형성사 또는 사상사에 관한 것 등을 통하여 수학에 대한 흥미를 고조시킨다.

둘째, 교과서의 내용에 관련된 사항을 활용하여 수업 내용을 발전시킨다.

셋째, 교과서의 내용에만 의존하지 말고, 자유롭게 보다 진일보한 학습을 하기 위해는 수학사로부터 여러 화제를 활용하여 자유 연구를 할 수 있다.

넷째, 수업에서 학생이 교재에 흥미를 가지고 보다 잘 이해할 수 있도록 하기 위해 수학사로부터 지식과 식견을 활용한다.

다섯째, 수학 교재 전체를 구성할 때의 관점으로서 수학사를 활용하는 방법이 있다. ([15])

김춘영(1992)은 수학 수업에 수학사를 이용하는 방식을 일곱가지로 제시하였다.

첫째, 과거 수학자들의 일화를 소개한다.

둘째, 학생에게 새로운 개념에 대한 역사적인 소개를 제공한다.

셋째, 학생들에게 역사적 문제를 이해시키고 지금 학습하는 개념이 그 문제의 답임을 알게 한다.

넷째, 퍼즐을 이용하여 수학사를 접근하며 탐구력도 기른다.

다섯째, 수학사를 강의한다.

여섯째, 교실 혹은 가정학습으로 과거 수학교재를 이용해 보도록 한다.

일곱째, 오늘날의 학습자의 어려움을 이해하고 해결하기 위해 과거 오개념, 실수, 선택적 관심들은 연구한다. ([13])

2. 수학교육과 실생활

1) 수학교육과 실생활의 견해

제 7차 교육과정은 문제해결력의 신장보다 광의의 개념인 수학적 힘의 신장으로 종합될 수 있는데, 수학적 힘이란 탐구하고 예측하며 논리적으로 추론하는 능력, 수학에 관한 또는 수학을 통한 정보 교환 능력, 수학과 다른 학문적 영역 사이의 아이디어를 연결하는 능력, 문제 해결이나 어떤 경정을 내려야 할 때 수량과 공간에 관한 정보를 찾고 평가하고 사용하려는 성향과 자신감을 포함하는 것으로 인지적인 측면과 정의적인 측면 모두 포괄하는 것으로 볼 수 있다. 수학교육의 방향을 제시한 NCTM(2000)에서는 생활주변의 문제 상황을 출발점으로 원리나 법칙을 스스로 발견하여 생활 주변의 여러 상황에 활용해 보게 하고 창의적으로 문제를 해결해 나갈 수 있도록 하기 위해 수학적 문제 해결, 추론과 증명, 의사소통, 연결성, 수학적 표현을 강조하고 있다. 수학과 교육 목표는 수학적 지식과 기능을 습득하고 수학적으로 사고하고 의사소통하는 능력을 길러, 여러 가지 현상과 문제를 수학적으로 고찰하고 합리적으로 해결하는 능력을 기르며, 수학에 대한 긍정적 태도를 기르는데 있다. ([7],[2])

급격히 변화하는 정보화 사회속에서 학생들에게 수학을 제대로 배우는 방법을 알게 하기 위해 어떠한 방식을 통해 수학을 가르쳐야 하는가에 관한 근본적인 문제에 직면하면서 NCTM(2000)은 다음과 같은 기준을 통하여 수학적 연계성을 제시하였다.

첫째, 수학적 아이디어들 간의 연결성을 인식하고 활용한다. 수학적 연결성의 관점에서 새로운 아이디어를 이전에 배웠던 수학의 확장으로 파악한다.

둘째, 수학적 아이디어들 내적 연결성과 일관성 있는 전체를 구성하기 위한 방식을 이해한다. 학년이 올라감에 따라 학생들은 여러 가지 상황에서 동일한 수학적 구조를 파악할 수 있는 능력을 길러야 한다.

셋째, 수학외적 상황에서 발생하는 문제를 다룸으로써 수학에 대하여 배울수 있는 기회를 가져야 한다. 정보화 사회란 개인이 필요로 하는 정보를 능동적으로 모색하고 정리하여 해석하는 능력을 필요로 하는 사회라는 점에서 문제 해결자 스스로 열

린 상황을 구조화하는 능력까지 획득할 것을 요구한다.

수학은 필요에 의해 발생했다. 수학사를 통해 이 말의 정당성을 분명히 확인할 수 있으며, 수학이 농업, 공학, 상업, 종교의식을 보조하기 위한 실용적인 학문으로 등장했다는 주장에 대한 충분한 근거도 찾아볼 수 있다.수학의 각 주제가 탄생한 과정을 통해서 그리고 그 주제가 활용된 예를 통해서 수학의 실용성을 어느 정도 보여줄 수 있다. 그러나 과거에 필요했던 수학만으로 21세기의 학생에게 수학의 실용성을 보여주기는 어려울 것이다. 현재 응용되고 있는 수학의 예를 보여주어야 할 것이다. 학교 수학은 실생활에 응용될 수 있는 내용을 많이 포함하고 있다. 모든 주제에는 그와 관련된 응용 문제를 반드시 포함하고 있다. 그런데 이런 응용 문제는 오래전부터 교과서에 등장해서 과거에는 의미 있던 문제가 시간이 지나면서 심하게 변형되어 의미를 잃고 '문제를 위한 문제'로 전락한 경우도 있을 것이다. 그리고 실생활의 복잡한 상황을 교실에서 손쉽게 다루기 위해 변형되고 단순화시켰기 때문에 수학의 실제적인 응용을 보여주는데 부족할 수 있다. ([19])

2) 문제해결의 지도

문제해결은 창조적인 인간 육성에 필요한 수학적 사고력을 신장 시키는데 중점을 두고 있다. 지금까지 수학과에 대한 문제 해결 학습은 대부분이 학습자 스스로의 힘보다는 교사 중심의 수용 학습으로 이루어지는 사례가 많다는 점과 문제 해결의 학습단계에 지나치게 얽매여 형식적인 단계적용의문제 해결 학습이 이루어지고 있으며, 과정보다는 결과 중심이 이루어져 온 것이 문제점으로 제기되어 왔다.

일찍이 헝가리의 수학자 G. Polya는 그의 저서 'How to solve it?' 에서, 실험적이고 귀납적인 과학으로서 만들어 가는 도중의 수학을 강조하면서, 문제 해결의 지도를 학생들의 호기심을 불러일으킬 수 있으며 학생들의 인지 능력에 맞는 문제를 제공하고, 이를 해결할 수 있도록 도와 문제를 해결하는 독립적인 사고의 맛과 방법을 체득하게 하는 것으로 생각했다. 이렇게 문제 해결의 지도가 이루어지려면, 교사는 무엇보다도 학생들의 인지 능력과 학습수준을 고려하려 다양한 방법으로 사고할 수 있는 학습 환경을 조성해 주어야 할 것이다. 즉 학생들에게 학습 상황에 적절한 조언들을 제공하여 줌으로서 그들로 하여금 주어진 문제를 능동적이고, 창의적으로 해결하게 할 수 있도록 도와주어야 한다. ([3])

3. 삼각함수

1) 용어의 역사

(1) 각

각의 크기, 즉 각도를 측정하는 일반적 단위는 바빌로니아인들에 의해 만들어 졌다고 알려져 있는데, 어떤 사람이 달력으로 쓰던 원둘레를 반지름으로 나누어 보았더니 마치 60일 분을 표시해 둔 곳의 길이와 반지름의 길리와 같았고 계속해서 그 원의 둘레를 반지름으로 나누어 보니 알맞게도 6번으로 나누어지고 원래의 위치에 되돌아 올 수 있었다. 그리하여 원둘레의 반지름의 길이로 자르면 6등분이 된다는 사실과 또 6등분을 한 하나의 호가 60일분을 표시한 것과 같은 길이임을 확실하게 알게 되었던 것이다. 그리고 다음에는 어떤 원에서도 원둘레의 1/6에 해당하는 호의 양끝과 원의 중심을 이어 생긴, 두 반지름 사이의 각은 모두 같은 것임을 알게 되었고 나아가 이런 각을 조사해 보았더니 반대로, 원둘레에 그려진 60일 분의 크기와 같았다. 그래서 일정한 길이를 갖는 호에 대응하는 것의 크기는 항상 같음을 알게 되었고 이와 같은 각을 6개, 차례로 붙여보면 마치 하나의 원이 되므로 원은 360이고 이 360구분의 하나하나를 각이라도 이름을 지었다고 한다.

이런 360도 분할은 바빌로니아의 60진법에 잘 맞았고, 나중에는 그리스인들에 의해 도입되어 프톨레마이오스가 현에 관한 표를 만드는데 사용되었다. 수체계로서의 60진법은 현대 쓰이고 있지 않지만, 원의 360도 분할을 여전히 사용하고 있다. 또 이런 원의 각은 분할 외에도 1시간을 60으로 나누고 1분을 60초로 나누는데 60진법의 흔적이 남아있다. ([21],[6])

(2) 라디안

라디안 또는 호도법이 전 세계적으로 각도 극정의 표준단위로서 채택된 것은 비교적 최근에 와서이다. 1라디안은 반지름이 r인 원에서 원주위에 있는 길이 r인 호에 대응하는 중심각의 크기이다. 원을 한 바퀴 완전히 일주하면 $2\pi(\approx 6.28)\times$반지름이 되고, 반지름을 1라디안의 중심각 크기와 같으므로, $360^\circ = 2\pi$라디안이 된다. 따라서, 1라디안 = $360^\circ / 2\pi \approx 57.29^\circ$ 이다. 우리가 자주 듣게 되는 얘기 가운데 하나는

라디안이 도(°) 보다 큰 단위이고 각도를 좀 더 작은 숫자로 표현할 수 있기 편리하다는 것인데, 이것은 옳지 않다.

 라디안을 사용하는 이유 중에 라디안을 사용하면 여러 가지 식을 단순화 할 수 있기 때문이다. 예컨대 중심각의 크기가 θ(라디안으로) 일 때 이에 대응하는 호의 길이는 $s=r\theta$이다. 하지만 이 θ를 도(°)로 나타내는 경우에 이 식은 $s=\pi r\theta/180$ 가 된다. 각 θ에 해당하는 부채꼴의 면적은 라디안으로 나타낼 경우$A=r^2\theta/2$이고, 도(°)로 나타낼 경우에는 $A=\pi r^2\theta/360$이다. 이를 통해 알 수 있듯이 라디안을 사용하면 이들 식에서 원하지 않는 요소인 $\pi/180$를 제거할 수 있다. ([21],[6])

(3) 사인, 코사인, 탄젠트의 기원

(가) 사인(sine)

 sin의 기호는 1624년 영국의 수학자 에드문트 군터(Edmund Gunter : 1581~1626)가 처음으로 사용하였다. 하지만 그 기호는 이전에 사용했던 기호를 변형하여 사용한 것이다.

 기호 sin은 sine을 축약한 것인데, sine은 길이의 커브, 땅의 움푹 들어간 곳, 옷의 주름, 꼬불꼬불한 길. 가슴 등의 다양한 의미를 가진 라틴어 sinus에서 온 것이다.

기호 sin은 1634년 프랑스의 수학자 에리곤네(Pierre Hèrigone : 1580~1643)의 책에서 처음으로 사용하였고, 지라드(Girard)가 1626년에 기호 sin를 처음 사용하였다는 주장도 있다. 그러나 지라드가 사용했던 표기 방식은 현재와는 다소 다르게 실제로는 A의 사인을 $^{\sin}{}_{A}$로 표현했다. 또한 1631년 리차드노우드(Richard Norwood)는 삼각법에 대한 책에서 사인을 s, 코사인을 sc, 탄젠트를 t, 코탄젠트를 tc, 시컨트를 sec 라고 사용하였다.

하여튼 이 기호가 널리 사용되기 시작한 것은 1632년 영국의 수학자 윌리엄 오트레드(Willa Oughtred : 1574~1669)가 사용하면서 부터인것은 확실하다. ([16])

(나) 코사인(cosine)

cos은 라틴어cosinus(cosine)을 줄여 쓴 것으로서 1620년 군터가 complementum(complement)와 sinus를 합친 co.sinus를 사용할 것을 제안했지만 1658년 뉴턴에 의해 cosinus로 수정되었으며 1729년 레오나드 오일러에 의해 최초로 cos로 사용되었다. 그러나, 오일러가 독창적으로 기호를 고안한 것은 아니고, 그 이전에 쓰이던 기호를 개량한 것이다.

한편 1588년에는 토머스 핑케(Thoas Fincke : 1561~1656)가 그의 저서 구면기하학에서 코사인의 기호로 sine complement의 약자인 sin.com을 사용하였다. ([16])

(다) 탄젠트(tangent)

tangent는 접속하고 있다 는 의미를 가진 라틴어 tangĕns에서 온 것이다. 이러한 이유로 tangent가 접선으로 번역되고 있기도 하다. 본래 tangent는 옛날에는 umbra recta라고 부르건 것으로 해시계 바늘의 그림자를 의미한다.

해시계를 바늘과 건물 벽에 수직이 되도록 설치하면, 바늘의 그림자는 건물 벽에 바늘의 수직인 방향으로 생기게 된다. 이 때 이 그림자의 길이는 바늘의 길이를 반지름으로 하는 원의 접선의 일부로 생각될 수 있다. 대체로 이러한 이유에서 1583년 덴마크의 수학자 토머스 핑케(Thoas Fincke : 1561~1656)가 tangent라는 용어를 사용한 것으로 알려져 있다. 1624년 에드문트 군터가 독창적으로 tan라는 기호를 고안한 것이 아니고, 실제로는 그 이전에 사용했던 기호를 개량한 것이다.

군터 이전에 핑케가 각각 sin. , tan. 라는 기호를 사용했었는데 핑케의 기호에는 군터의 기호와는 달리 축약을 의미하는 점 ‘ . ’이 있었다. 근데 기호가 널리 이용되면서 점이 떨어져 나가고 군터의 기호로 정착이 된것이다. ([6])

(라) 시컨트(secant)

sec 라는 기호는 1632년 윌리엄 오트레드가 처음 사용하였지만, 그 이전에 토머스 핑케가 1583년 그의 저서 구면기하학에서 할선의 의미를 가진 라틴어 secans(secant)를 줄여서 sec. 라는 기호를 사용하였다. ([16])

(마) 코탄젠트(cotangent)

1588년 토머스 핑케가 그의 저서 구면기하학에서 코탄젠트(cotangent)에 대한 기호로 tangent complement의 약자인 tan. com. 을 사용하였다.

조우너스 무어(Jonas Moore)경은 1764년에 쓴 수학개론이라는 책에서 Cot. 라는 기호를 사용하였으며, 사무엘지케(Samuel Jeake)는 1693에 쓴 그의 저서 산술(Arithmetick)이라는 책에서 코탄젠트에 대한 기호로 cot.를 사용하였다. 현재 사용하는 기호 cot는 1758년 독일의 수학자 캐스트너(Abraha Gotthelf Kaestner : 1719∼1800)가 산술, 기하, 삼각법의 원리라는 책에서 처음 사용하였다. ([16])

2) 역사적 배경

삼각함수를 이용해서 삼각형의 6요소(세변의 길이, 세각의 크기)사이의 관계를 조사하거나, 주어진 조건에 맞는 삼각형을 결정하는 연구를 삼각법이라고 한다. 삼각법은 천문학, 점성술, 토지측량, 항해술과 같은 실생활에 널리 사용되어 그 역사가 오래 되었다.

삼각법을 체계적으로 연구한 가장 오래된 학자는 기원전 그리스의 히파르코스(Hipparchos)라고 볼 수 있다. 히파르코스는 천문학에서 필요한 구면삼각법의 창시자로 천문학을 연구하면서 공의 표면과 같은 면, 즉 구면 위의 두 점 사이의 거리와 각의 크기를 잴 필요를 느껴서 삼각법을 연구하였으며 원의 호의 길이를 알 때 그에 대응되는 현의 길이를 아는 '현의 표'를 만들었는데 이것이 최초의 간단한 삼각함수표라 할 수 있다.

기원전 100년경 메넬라우스는 원의 현에 대하여 쓴 여섯권짜리 논문을 썼지만 모두 분실되었다고 한다. 다행이 그의 다른 저작인 구면론이 아라비아어로 보존되어 그리스에서 삼각법의 발전에 대한 연구에 상당한 빛은 주었다. 제 Ⅰ권에서는 '구면삼각형'을 정의한 후 유클리드가 평면삼각형에 대하여 세운 많은 면제(이를테면 합동정리, 이등변 삼각형에 관한 정리 등)를 구면 삼각형에 대하여 세우고 있다. 제 Ⅲ권은 당시의 구면 삼각법을 싣고 있으면, 그것은 주로 오늘날 메넬라우스 정리로 알려진 명제로부터 유도된 것이다. '한 횡단선이 삼각형ABC의 세변 BC, CA, AB와

각각 L, M, N에서 만나면 $\left(\frac{AN}{NB}\right)\left(\frac{BL}{LC}\right)\left(\frac{CM}{MA}\right)=-1$ 이다.’

구면인 경우에는 횡단 대원이 구면 삼각형ABC의 세면 BC, CA, AB와 만난다고 가정해야하고, 대응 결과는 다음과 동치가 될 것이다.

$$\left(\frac{\sin AN}{\sin NB}\right)\left(\frac{\sin BL}{\sin LC}\right)\left(\frac{\sin CM}{\sin MA}\right)=-1$$

구면 삼각법의 많은 내용이 구면삼각형과 구면 횡단선을 가지고 이 정리로부터 유도될 수 있다.

그 후 프톨레마이오스 (Klaudios Prolemaios 또는 Ptolemy)는 ‘알바게스트’ 라는 책을 쓰고 오늘날의 사인표에 해당하는 수표를 작성하였다. ‘알바게스트’는 13원으로 이루어져있는데 이 책의 제 1권 10장과 11장에서 삼각법에 대해 다루고 있다. 10장에서는 방법을, 11장에서는 현표(a table of chords)로 이루어져 있는데 이것은 중심각(α)에 대응하는 현의 길이를 나타내는 현함수(crdα)에 대한 도표이다. 그것은 반지름이 60인 원에서 중심각이 α인 호에 대응하는 현의 길이를 정의된다. crdα = $120 \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$ 가 성립하므로 한 각에 대하여 현과 사인(sin)사이에 간단한 관계가 있음을 알수 있다.

9세기에 아라비아에 알바타니(al-Battani : 858~929)는 톨레미의 업적을 소개하고 tan, cot에 관한 1° 마다의 표를 만들었으며, 둔각 구면삼각현에 대한 cos정리를 알고 있었다. 10세기에 아불웨파(Abul-wefa : 940~998?)는 tan, cot, sec, cosec의 개념을 확립하여 여섯 가지 삼각함수를 사용하였으며 15′ 간격의 삼각함수표를 만들었다.

유럽에서는 14세기 이후 삼각법이 천문학에서 독립하여 산술, 기하, 대수의 종합된 형태로 차차 체계를 세우게 된다. 코페르니쿠스의 제자인 레티쿠스(Rheticus 1514~1576)는 계산기를 시용해서 두 개의 뛰어난 삼각함수표를 작성하였다. 하나는 10″ 간격의 호에 대해 여섯 가지 삼각함수의 값을 소수열째 자리까지 계산한 수표이고, 다른 하나는 10′ 간격의 호에 대해 사인함수의 소수 열다섯째 자리까지 계산한 수표이다. 여기서 비로소 삼각함수를 직각삼각형의 변과 관련시켜 삼각비와 같이 정의하였다.

오늘날 우리가 쓰고 있는 사인, 코사인이라는 용어는 중세 인도에서 비롯된 것이며 여러 나라를 거쳐 번역되면서 17세기에 이르러 지금과 같은 용어로 굳어진 것이다.

현재와 같은 일반각에 대한 삼각비의 값이 표로 제시된 것은 뉴턴의 미적분학 연구에서 아래와 같은 사인과 코사인의 급수 전개를 발견한 이후이다.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \cdots$$

오일러는 다시 이들 공식을 실변수에서 복소수의 변수로까지 확장하고 복소수의 편각을 고찰함으로써 일반각의 개념을 확실히 했다. 이처럼 삼각함수는 오일러, 푸리에 등을 거치면서 현대 수학은 물론 현대물리학, 공학 등에 이르기까지 응용범위가 넓은 수학의 한 분야가 되었다. ([11],[12])

3) 수학자

(1) 히파르쿠스 (Hipparchus, 140년경)

우리에게 알려진 유명한 고대 그리스 수학자이자 천문학자는 아시아 지역인 미노아의 니케아에서 기원전 140년경에 활동했던 히파르쿠스이다. 그는 기원전 146년경에 알렉산드리아에서 춘분점을 관측하긴 했지만 대분분의 중요한 관측은 로즈(Rhodes, 에게 해의 터키 서남해안에 있는 섬)의 상업 중심지에 있던 유명한 천문대에서 행해졌다. 히파르쿠스는 대단히 주의 깊은 관측가였는데 천문학에서 평균음력 한 달의 길이를 오늘 날 사용하고 있는 값과 1″밖에 차이가 나지 않는 값을 구했고 황도의 경사각을 정확히 계산했으며 연중 세차운동을 발견하고 추정한 것이 모두 그의 업적이다. 또 태음시차를 계산했고 달의 근지점과 평균운동을 밝혔으며 850개의 항성을 목록화했다고 전해진다. 원을 360°로 분할하는 것을 그리스에 소개한 사람도 히파르쿠스였거나 히프시클레스(Hipsicles, 180년경)였으며 또 히파르쿠스는 지구 위의 각 지점의 위치를 위도와 경도로 나타내자고 주장했다고 하지만 간접적으로 전해진 것이고 히파르쿠스가 쓴 저작이 오늘날까지 전해 내려온 것은 거의

없다.

히파르쿠스의 천문학에서의 업적보다 더 중요한 것은 삼각법의 발전에서 한 역할에 있다. 4세기의 주석자인 알렉산드리아의 테온(Theon)에 의해서 히파르쿠스가 현표(각에 대한 현의 길이를 나타내는 표)를 만드는 내용을 담은 12권의 논문을 썼다고 주장했다. 그 수표는 없어졌지만, 히파르코스의 책을 각색한 것으로 믿어지는 프톨레마이오스가 만든 그 이후의 수표는 보존되고 있다. 그래서 히파르쿠스는 '삼각법의 아버지'로 일컬어진다. 고대 천문학자들은 행성들이 원 궤도를 따라 움직인다고 생각했기 때문에 원의 현에 대하여 많은 관심을 가지고 있었다. 결국 사인값과 원의 현의 길이는 삼각법의 시초라고도 할 수 잇다. 히파르쿠스는 지구와 달의 거리를 계산하는 과정에서 그 당시 새로운 기술인 삼각법을 이용하였다. ([11])

(2) 레기오몬타누스 (Regiomont anus, 1436～1476)

15세기에 가장 유능하고 영향력 있었던 수학자는 요한 뮐러(Johann Muller, 1436～1476)였는데, 그는 오히려 그가 태어난 쾨니히스베르크의 라틴어 이름은 레기오몬타누스로 더 알려져 있다. 그는 어렸을 때 빈의 포이에르바하 밑에서 공부했고, 나중에는 '알마게스트'의 나머지 번역을 완성하는 작업이 그에게 맡겨졌다. 그는 또 아폴로니우스, 헤론, 아르키메데스 등의 그리스 원전을 번역하기도 하였다. 1464년에 쓰여지고 그의 사후인 1533년에 발표된 가장 위대한 논문 '삼각법의 모든 것, De triangulis comnimodis'은 천문학과 무관하게 수학적으로 전개된 평면 및 구면 삼각법에 관한 유럽 최초의 세계적인 해설서였다. 레기오몬타누스는 이탈리아, 독일 등지로 오랫동안 여행하였고, 1471년에는 뉴렘베르크에 안치하였다. 그는 그곳에서 천문대를 세우고 인쇄소를 만들고 천문학에 관한 몇 편의 논문을 썼다. 또, 그가 날개를 접었다 폈다 할 수 있는 기계식 독수리를 제작했다고 전해지는데 이는 그 시대의 경이로운 일로 생각되었다. 1475년에 레기오몬타누스는 당시의 식스투스 4세 교황으로부터 달력을 개조하는데 참여해 달라는 부탁을 받고 로마에 초청되었다. 그러나 그는 로마에 도착하자마자 40세의 일기로 갑자기 죽었다. 그가 흑사병으로 죽었다고 전해지고 있지만, 아마 적에 의하여 독살되었을 것이라는 풍문으로 인하여 그의 죽음은 신비에 싸여 있다.

레기오몬타누스의 '삼각법의 모든 것, De triangulis comnimodis'은 다섯권의 책으

로 이루어져 있으며 그 중 처음 두 권은 평면삼각법에 관한 것이고 나머지 세권은 구면삼각법에 관한 것이다. 그 논문에서 그는 주어진 세 조건을 만족하는 삼각형을 결정하는 흥미로운 문제를 다루고 있다.

그는 여러 번 대수를 응용하였는데 우선 제 2권의 명제 12에는 '한 변과 그 변에 대한 높이와 나머지 두 변의 비가 주어질 때 이 삼각형을 구하라'와 명제 23에는 '두 변의 차와 세 번째 변에 대한 높이와 그 높이가 세 번째 변의 선분을 나누는 비가 주어질 때 이 삼각형을 구하라.'를 살펴보면 그의 대수는 수사적 대수로서 도형의 미지의 부분을 2차방정식의 근으로 찾았다. 물론 그의 방법이 일반적인 경우를 고찰하는 것과 같은 의미를 지니고는 있었지만 그는 이미 주어진 부분에 특별한 수 값을 주었다. '삼각법의 모든 것, De triangulis comnimodis'에서 이용한 삼각함수는 사인과 코사인뿐이었다. 그러나 이후에 레기오몬타누스는 탄젠트를 계산했으며 또 다른 책에서는 네 변이 주어진 순회사변형을 작도하는 문제에 대수와 삼각법을 응용하였다. ([11])

(3) 비에트(viete, 1540~1603)

16세기의 가장 위대한 프랑스 수학자는 프랑수아 비에트로서 흔히 그를 라틴어 이름인 비에타라고도 부르는데 그는 고등법원 판사로 일하면서 대부분의 여가시간을 수학에 몰두했다. 그는 1540년에 퐁테네에서 태어나서 1603년에 파리에서 죽었다.

비에트에 관한 몇 가지 재미있는 일화가 있다. 한번은 베네룩스제국(현재의 네덜란드, 벨기에, 룩셈부르크 지방)대사가 앙리 4세에게 다음과 같이 큰소리쳤다고 한다. "프랑스에는 1593년에 우리나라의 아드리아누스 로마누스 (Adrianus Romanus,1561~1605)가 제시한 45차 방정식의 근을 구할 수 있는 사람이 아무도 없지 않습니까!" 그리하여 비에트가 그 자리에 출두되었고 그의 앞에 로마누스의 방정식이 놓아졌다. 기초적인 삼각법을 이해하고 있었던 비에트는 $k=\sin 45\theta$ 일때 $x=2\sin\theta$를 만족하는 방정식이라는 것을 알아채고, 단 몇 분만에 두 개의 근을 찾았고 그 뒤에 21개의 근을 더 찾았다. 그러나 그도 음근은 생각해내지 못했다. 이번에는 미에트가 로마누스에세 아폴로니우스의 문제를 풀어보라는 도전장을 냈다. 그러나 로마누스는 유클리그 도구만을 가지고는 해를 구할 수 없었다. 그는 비에트의 우아한 해를 본 후에 비에트를 만나기 위해 퐁테네를 방문했고 그리하여 그들 사이에 따뜻한 우

정이 맺어졌다. 또 비에트는 스페인과 전쟁 중에 수백개의 문자로 된 암호문을 해독하는데 성공하여 프랑스가 2년동안 전쟁에서 유리한 전략을 세울 수 있었다. 그러자 스페인의 필립 2세는 그 암호문이 절대로 해독될 수 없는 것으로 믿은 나머지 교황에게 프랑스가 “기독교 신앙의 실천을 위배하여 악마를 고용했다”고 불평했다. 비에트는 수학에 일단 몰입하면 서재에서 며칠 동안이고 밖에 나오지 않았다고 전해진다.

비에트는 뛰어난 대수학자였으므로 그가 기하학에 대수와 삼각법을 응용했다는 것은 그리 놀라운 일이 아니다. 그는 고대의 3대 작도 문제 중 각의 삼등분과 배적의 문제가 3차 방정식의 해법에 의존한다는 것을 보임으로써 그 문제들의 연구에 진일보를 가져다 주었다.

1594년에 비에트는 고레고리력(서양 신력)에 대한 클라비우스와의 격심한 논쟁으로 인하여 약간의 나쁜 평판을 얻었다. 이 문제에서 비에트의 태도는 완전히 비과학적이었다고 한다. ([11],[8])

시기	수학자	활동 내용
15C	레기오몬타누스 (Regiomontanus)	「삼각법의 모든 것. De triangulis omnimodis」; 평면, 구면 삼각법에 관한 유럽 최초의 체계적인 해설서를 지었다. 「알마게스트」를 라틴어로 번역. 삼각법을 부활시켰다.
16C	레티쿠스 (Rhaeticus)	사인과 코사인 표가 들어있는 「삼각형의 궁전」이라는 논문 2권으로 삼각법을 독립된 학문으로 만들었다. 처음으로 삼각함수를 직각삼각형의 변의 비로서 정의하였다.
	비에트 (Viete)	서유럽에서 처음으로 여섯 개의 삼각함수를 모두 이용하여 평면 삼각형과 구면 삼각형을 해결하는 방법을 개발한 책을 지었다.
17C	지라드 (Girard)	1626년 sine, tangent, secant의 약자 sin, tan, sec를 최초로 사용하였다.
	오트레드 (Oughtred)	1657년 「삼각법」 출간, 6개 삼각함수의 이름을 생략형으로 소개하였다.

4) 삼각함수단원의 내용과 목표

7차 교육과정 중 삼각함수단원의 목표

▶ 고등학교 1학년

가. 삼각함수

(1) 일반각과 호도법의 뜻을 안다.

(2) 삼각함수의 뜻은 안다.

(3) 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있고, 그래프의 성질을 이해한다.

(4) 삼각함수의 성질을 이해한다.

(5) 간단한 삼각방정식과 삼각부등식을 풀수 있다.

나. 삼각형에의 응용

(1) 사인법칙과 코사인법칙을 이해한다.

(2) 삼각함수를 활용하여 삼각형의 넓이를 구할수 있다.

< 용어와 기호> 대응, 일대일대응, 항등함수, 상수함수, 일대일함수, 합성함수, 역함수, 다항함수, 유리함수, 분수함수, 점근선, 무리함수, 시초선, 동경, 일반각, 호도법, 라디안, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수, 삼각함수, 주기, 주기함수, 삼각방정식, 삼각부등식, 사인법칙, 코사인법칙, $f: X \to Y$, $g \circ f$, $(g \circ f)(x)$, $y = g(f(x))$, f^{-1}, $y = f^{-1}(x)$, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$

<교수・학습 상의 유의점>

① 합성함수와 역함수는 이차 이하의 다항함수, 유리함수, 무리함수를 통해 이해한다.

② 삼각방정식과 삼각부등식의 일반해는 다루지 않는다.

▶ 수학 II

삼각함수

가. 삼각함수의 덧셈정리

(1) 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다.

(2) 삼각함수의 배각의 공식, 반각의 공식을 이해한다.

나. 삼각방정식

(1) 간단한 삼각방정식을 풀 수 있다.

<용어와 기호> 덧셈정리, 배각의 공식, 반각의 공식, 일반해, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$, $\cot x$

<교수・학습 상의 유의점>

① 삼각함수의 여러 가지 공식 사이의 관계를 이해하게 하고, 이를 활용하게 하는데 중점을 둔다.

② 삼각방정식은 주어진 구간 안에서 해를 구하는 경우만 다룬다. ([2])

5) 삼각법의 규준

수학교육과정은 삼각법을 포함함으로써, 그 결과 학생들은

- 삼각형을 포함한 문제 상황에 삼각법을 적용할 수 있다.
- 사인함수와 코사인 함수를 이용해 실세계의 주기적인 현상을 탐구할 수 있어야 한다.

그리고 대학 진학 학생들은

- 삼각함수와 주기함수(circular function)와의 관련성을 이해할 수 있다.
- 실세계에서 주기적인 상황을 모델링하기 위해 주기함수를 이용할 수 있어야 한다.
- 삼각함수에 일반적인 그래픽 기술을 적용할 수 있어야 한다.
- 삼각방정식을 풀고 삼각항등식(trigonometric identities)을 증명할 수 있어야 한다.
- 삼각함수와 극좌표, 복소수, 수열 사이의 관계를 이해할 수 있어야 한다.

삼각법은 삼각형의 측정술에 대한 탐구에 그 기원을 둔다. 향해술과 측량술 분야를 포함해서 많은 실세계의 문제들은 삼각현의 길이를 구하는 것을 요구한다. 회전이동의 행렬 표현, 벡터의 방향각(direction angle), 극좌표, 복소수의 삼각법 표현 등과 같은 중요한 수학적 주제는 기하와 대수의 연결을 강조하는 삼각비를 요구한

다.

직각삼각형의 삼각비를 자연스럽게 일반화함으로써 삼각함수와 주기함수가 생겨났다. 이러한 함수들, 특히 사인과 코사인은 일정한 주기 운동(uniform circular motion)과 온도 변화, 음파, 바이오리듬, 조수변화와 같은 많은 실세계의 주기적 현상의 수학적 모델이 된다. 모든 학생들이 그러한 현상으로부터의 자료들을 탐구해야 하지만, 이 학생들은 삼각함수의 역과 삼각법 표현이 포함된 항등식을 학습해야 하며 이들은 방정식과 부등식의 해를 구하는 데 이용할 수 있어야 한다.

계산기는 개념적인 이해와 실제적인 응용력은 발달시키는 데 있어서 좀 더 많은 시간을 사용할 수 있게 하며 계산력을 제공한다는 점에서 삼각법의 지도에 매우 용이하게 쓰일 수 있으며 또 쓰여야 한다. 그래픽 소프트웨어는 학생들에게 삼각함수와 역함수의 성질을 이해시키는데 중요한 역할을 한다. 덧붙여 대학 지망생들은 삼각방정식과 부등식을 대수 규준에서 설명한 것처럼 컴퓨터에 기초한 방법(computer-based method)를 이용하여 풀 수 있어야 한다. ([20])

4. 수학사를 활용한 삼각함수

1) 첨성대에서 찾아보는 삼각함수

신라시대 구립 관상대라 할 수 있는 첨성대는 신라 27대 선덕여왕(632~646)대에 만들어졌다. 첨성대의 기단이 정사각형이고 몸체는 원으로 되어 있는 사실은, 옛날 사람들이 천원지방(天圓地方)즉, 하늘은 둥글고 땅은 네모나다는 생각을 가지고 있었기 때문이라고 한다.

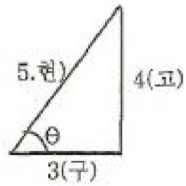
첨성대를 쌓은 돌의 수는 모두 361개 반이며, 음력으로 따진 일년의 날수와 같다고 한다. 원주형으로 쌓은 석단은 27단인데, 맨 위의 정(井)자 모양의 돌까지 따지면 모두 28단으로 기본 별자리 28수를 상징한다. 석단중간의 네모난 창 아래위 12단의 석단은 12달, 24절기를 의미한다고 한다.

주비산경의 기초가 되는 구고현의 정리를 이용해서 만들어진 첨성대는 돌 하나하나에 태양이 어떻게 비치느냐에 따라 1년의 모든 절기와 방향을 알수 있는 정확한 구

조를 만들어냈다.

첨성대의 기단은 24.20척, 높이는 30.63척으로 그 비는 약 4:5즉, $\frac{4}{5}$가 된다. 또 위의 원과 밑의 원의 지름 비는 3 : 5로 비 값은 $\frac{3}{5}$이 된다. 이 구고현의 정리의 직각 삼각형의 구가 3, 고가 4, 현이 5가 될 때, sin, cos의 값이 되는 것을 알 수 있다.

$$\sin\theta = \frac{\text{고(높이)}}{\text{현(빗변)}} = \frac{4}{5} \quad , \quad \cos\theta = \frac{\text{구(빗면)}}{\text{현(빗변)}} = \frac{4}{5}$$



신라시대의 건축물에 구고현 정리를 이용해서 만들었다고 보이는 것이 많다. 석실, 천장, 천군리 폐사 쌍탑 등의 탑, 불국사 배치도 등에서 이용된 것을 알 수 있다. ([10])

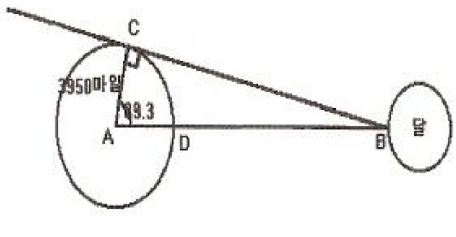
2) 지구에서 달까지의 거리

삼각법과 천문학의 관계는 그리스 시대부터 시작되었다. 그리스인들은 모험을 좋아하고 진취적인 사람들로 바다를 건너 먼 나라로 여행을 하곤 했는데, 이때 길잡이로 삼은 것은 별자리였다. 천체에 대한 관심은 천문학을 낳았으며 하늘의 형태를 구면으로 본 그리스인들은 구면상에서 도형을 연구하였고, 그 결과 오늘날 구면 삼각법이라고 부르는 수학 지식을 얻게 되었다. 그리고 구면 삼각법의 연구에는 평면 삼각형의 지식이 필요하다.

기원전2세기에 수학자이자 천문학자인 히파르쿠스는 지구에서 달까지의 거리를 약 24만 마일(약 39만 km)이라고 계산하였다. 이 값은 실제 거리와의 오차가 5%인 정확한 값이라 한다.

적도 위의 한 점 D의 연직선상 머리 위의 달이 떠 있고 같은 시각에 수평선을 막 떠오르는 달을 보는 다른 한 점 C가 있다. 이때 $\angle ACB$는 직각이 된다. 따라서 $\cos A = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$ 의 식이 성립한다. 그런데 지구의 반지름 AC의 길이는 이미 알도 있었으므로 $\angle A$의 크기만 알면 지구에서 달까지의 거리는 구할 수 있다. 그런데 히파

르코스는 이미 알고 있는 위도와 경도를 이용하여 $\angle A$의 크기가 $89^{\circ}3'$이라는 것을 알 수 있었으며, 그는 또 코사인 표를 작성한 최초의 사람이었으므로 이것들을 이용하여 지구의 중심으로부터 달까지의 거리를 계산할 수 있었다. ([10])

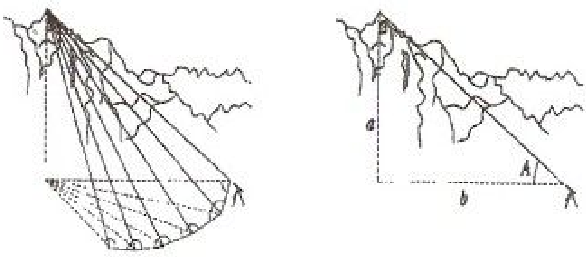


$$\overline{AB} = \frac{\overline{AC}}{\cos A} = \frac{3950}{0.01658} = 238{,}000(\text{마일})$$

3) 측량학과 삼각함수

삼각망을 이용한 측량법이라 불리는 방법은 측정하고자 하는 지점을 삼각형들의 꼭지점에 위치시킨다. 기준선은 직접측정과 천문학적 관측을 통해서 결정되고 삼각형들 안의 다른 선분들의 길이와 방향은 그 사이의 각을 측정하고 삼각법의 원리를 이용하여 계산된다. 각도는 한 쪽은 망원경이고 한쪽은 각도기가 달린 경위의처럼 정밀한 기계로 측정된다.

다음은 삼각법에 의한 에베레스트 산의 높이를 측정한 방법이다.



(a) (b)

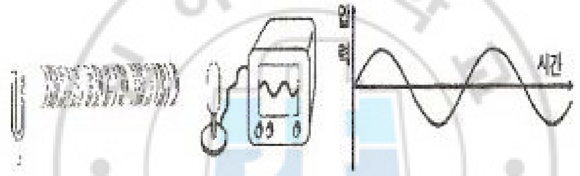
(a)처럼 경위의 수평각을 측정하고, 사인 법칙으로 각 삼각점으로부터 접근 불가능한 정상 바로 아래까지의 수평거리를 알아냈다. 각 직각삼각형의 공통 높이 a는(그

림 b) 사인법칙으로 계산해 냈다. 밑변이 b이고, 올려다보는 각도가 A임을 알았을 때, 사인법칙에 의해 다음과 같이 a를 구할 수 있다. ([10])

$$a = b\frac{\sin A}{\sin(\frac{\pi}{2} - A)} = b\frac{\sin A}{\cos A}$$

4) 음향학과 삼각함수

사인곡선은 원과 관계없는 많은 진동현상에서도 발생하다. 아래 그림에서 보듯이 진동하는 소리굽쇠는 음도 또는 음파를 발생시킨다. 음파는 우리 귀에는 공기 속에서의 파동으로 전달된다. 음압의 진동을 시간에 따라 변하는 모습을 보여주는 마이크로폰을 통해 살펴보면 다음과 같은 사인 곡선이 된다.



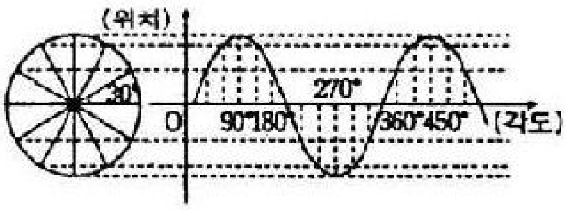
19C초 프랑스의 수학자인 '죠셉 푸리에(1768~1830)'는 모든 주기 곡선은 사인과 코사인 곡선을 적당히 합성해 놓은 것이라고 발표하였다. 죠셉 푸리에의 이 원리를 이용하여 기본적인 사인과 코사인 곡선을 함성하여 이상적인 음을 내는 악기를 만들었는데 그 악기가 바로 신디사이저이다. ([10])

5. 실생활을 활용한 삼각함수

우리가 생활하고 있는 주변에서 수학적인 이론의 기본지식들이 어떠한 방법으로 사용되고 있는지 예를 들어서 분석하고 활용한다. 실제 자료를 이용하였기 때문에 계산기나 컴퓨터 프로그램을 사용해야하는 문제가 있다는 것을 염두에 두어야 한다.

1) 같은 모양과 성질이 계속 반복되는 함수

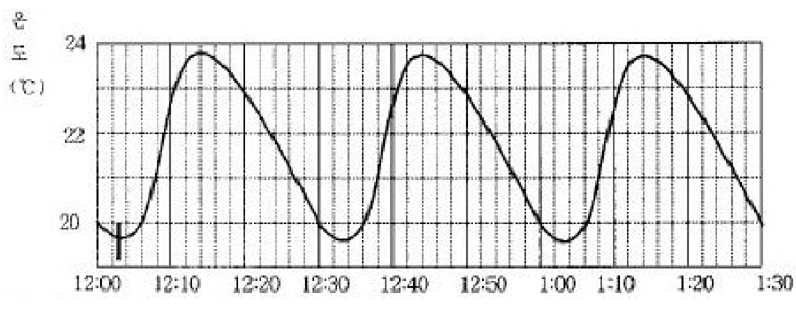
정월 대보름이 되면 시골에서 쥐불놀이를 하는데 깜깜한 밤중에 원을 그리면서 계속 불꽃놀이 돌아가는 모습을 보게 된다. 이때 수평을 기준으로 '돌아가는 각도와 불꽃의 위치' 사이의 관계를 그래프로 나타내면 어떤 모양일까?



이 그래프는 쥐불이 여러 번 돌아가도 같은 모양을 계속 반복한다. 위와 같은 모양이 반복되는 함수를 주기 함수라고 하는데 대표적인 주기 함수로는 삼각함수가 있다. 이런 주기함수들은 괘종시계의 추가 일정하게 왕복하는 것, 봄, 여름, 가을, 겨울이 일정하게 반복되는 것 등에서 많이 찾아볼 수 있다. ([23])

더운 여름에는 에어컨을 계속 틀어두게 된다. 그러나 미리 설정온도를 맞춰두면 온도는 한없이 내려가지 않고 설정온도에서 멈추게 된다. 에어컨이 정지된 상태에서는 다시 방안 온도가 올라가게 마련이며, 방안 온도가 일정온도 이상이 되면 다시 에어컨이 작동된다. 우리가 평소에 경험으로 너무 잘 알고 있는 이러한 작은 경험에도 매우 중요한 수학적 현상이 숨어있다는 사실을 알고 있는가?

아래 그래프는 에어컨이 작동될 때 시간의 흐름에 따른 방의 온도를 나타낸 것이다.



위의 그래프를 보고 아래 물음에 답해보자.

(1) 위의 그래프에서 가장 높은 지점과 가장 낮은 지점은 무엇을 의미하는 것일까?

(2) 그래프가 올라가는 상황과 내려가는 상황은 무엇을 의미하는 것일까?

(3) 그래프와 같은 상황이 벌어지는 이유를 생각해보자.

(4) 위 그래프에서 에어컨을 몇 분 동안 작동 되는가?

그래프가 일정한 간격으로 반복되고 있는 모습을 발견할 수 있는가? 위의 그래프처럼 일정한 간격으로 반복되는 그래프를 주기적인 그래프라고 한다. 또한 주기적인 그래프에서 곡선이 시작되고 나서 다시 되풀이되기 전까지의 그래프의 한 부분을 주기라고 한다.

(5) 에어컨을 설정을 변화시키지 않는다고 하면 2시 정각의 방안 온도는 얼마나 될까?

(6) 위의 그래프에서 한 가지 색을 이용하여 주기를 색칠해보자.

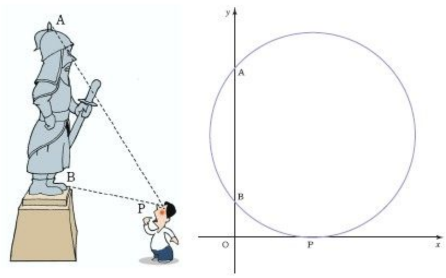
(7) 위의 그래프에서 에어컨은 몇 분마다 작동 되는 것일까?

(8) 에어컨의 성능을 더 높이기 위해서는 온도 변화의 폭이 더 적어져야한다. 그것은 그래프가 어떤 모양을 변해야 한다는 뜻일까? ([17])

2) 잘 보이는 자리

삼각법을 이용하며 가장 잘 보이는 위치가 있음을 알 수 있다. 이 문제는 1471년 레기오몬타누스가 제기한 것이다. 동상을 가장 잘 볼 수 있는 위치에 있는 사람의 시선과 동상의 위 끝과 아래 끝을 잇는 삼각형의 외접원의 원주 위의 모든 위치가 동상을 가장 잘 볼 수 있는 위치이다. 그러므로 지상에 서 있는 사람이 동상을 가장 잘 볼 수 있는 지점은 하나 밖에 없다.

(a), (b)의 그림은 동상을 가장 잘 볼 수 있는 지점의 눈의 위치를 P와 이 지점에서 동상을 바라볼 때의 시선과 동상의 위 끝과 아래 끝이 만나는 점을 각각 A, B라고 할 때, 이를 좌표평면에 옮겨 놓으면 (b)와 같은 그래프를 얻을 수 있다. ([24])



(a) (b)

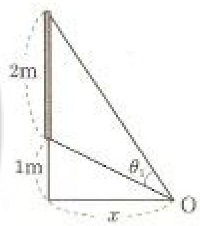
벽에 걸려있는 미술 작품을 감상하기 좋은 위치는 작품의 위 아래를 바라보는 각이 큰 곳이다. 마찬가지로 극장에서 영화를 보기 좋은 위치도 화면의 위 아래를 바라보는 각이 큰 곳이다. 미술관에서, 극장에서 가장 좋은 위치는 어디쯤인지 알아보자.

1. 미술관 벽에서 눈높이로부터 1m 높이에 그림이 걸려있다. 다음과 같은 경우에 그림을 보기에 좋은 위치를 구하여 보자.

(1) 높이가 2m인 그림을 바라보는 각을 θ_1이라고 하자.

오른쪽 그림과 같은 벽에서부터 x m 떨어져 있을 때,

다음 식이 성립함을 증명하여라.

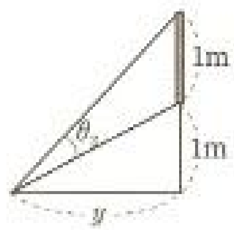


$$\cos\theta_1 = \frac{(x^2+1)+(x^2+9)-4}{2\sqrt{(x^2+1)(x^2+9)}}$$

(2) 반대쪽 벽에 걸린 높이가 1m인 그림을 보는 각을 θ_2라고 하자.

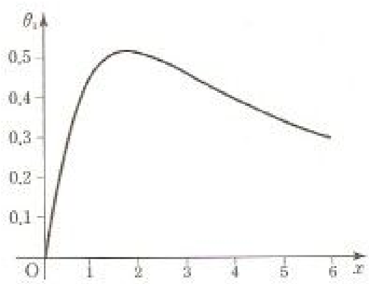
오른쪽 그림과 같이 벽에서부터 y m 떨어져 있을 때,

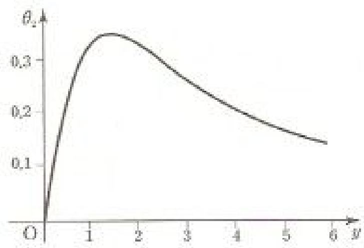
다음 식이 성립함을 증명하여라.



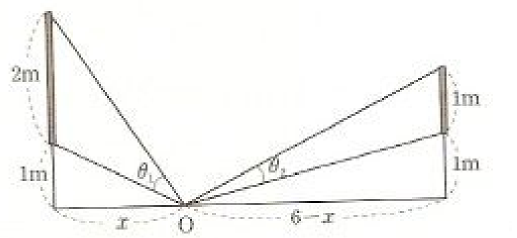
$$\cos\theta_1 = \frac{(y^2+1)+(y^2+4)-1}{2\sqrt{(y^2+1)(y^2+4)}}$$

(3) 위의 (1), (2)에서 그림을 바라보는 각의 크기가 최대가 되게 하려면 각각 벽으로부터 얼마나 떨어져 서야 하는가? 아래의 그래프를 보고 추측하여라.

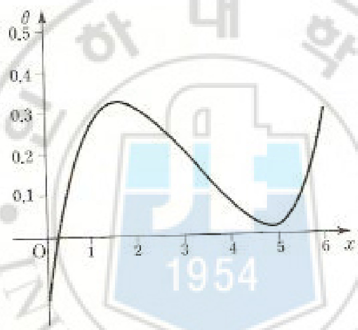




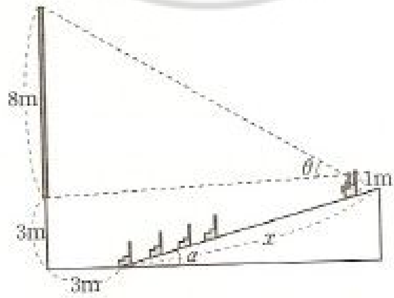
(4) 이 전시실의 폭은 6m이다. 제자리에서 돌아서면서 두 그림을 다 보려고 한다.



높이가 2m인 그림에서 x m 떨어져 있는 곳에서 두 그림을 바라보는 각의 차를 θ 라고 하여 그래프를 그리면 아래와 같다. 아래 그래프를 보고 θ가 최대가 되는 지점을 추측하여라.



2. 극장 영화를 볼 때 스크린을 보는 각의 크기가 가장 큰 곳이 어디인지 아래와 같은 조건에서 알아보자.



조건:

① 높이가 8m인 스크린이 바닥에서 3m올라간 곳에 설치되어있다.

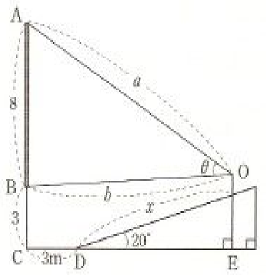
② 관람석의 첫 번째 열은 스크린이 잇는 벽으로부터 3m 떨어진 곳에서 시작되어 1m간격으로 배치되어 있으며 마지막 열은 21열이다.

③ 관람석 바닥은 $\alpha = 20^\circ$ 로 경사져 있다.

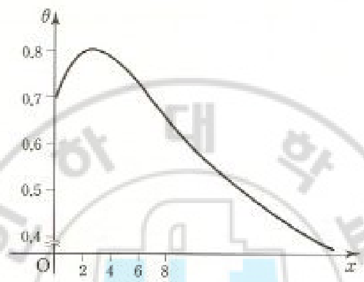
④ 관람석에 앉았을 때, 바닥에서부터의 눈높이는 1m이다.

(1) $\cos\theta$를 a, b에 관한 식으로 나타내어라.

(2) a, b를 각각 x에 관한 식으로 나타내어라.



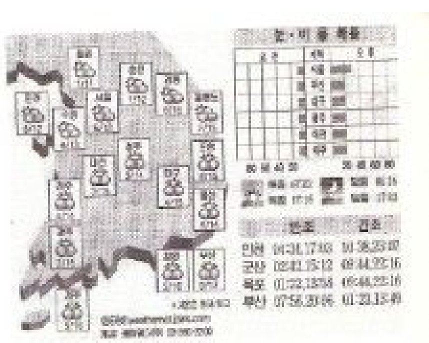
(3) 화면을 바라보는 각의 크기가 최대가 되게 하려면 대략 몇 번째 열에 앉으면 되겠는가? 아래 그래프를 보고 추측하여라. ([5])



3) 바닷물의 높이와 삼각함수

바닷가에 가보면 바닷물이 끊임없이 움직이고 있는 것을 볼 수 있다. 바닷물은 점차 올라가기도 하고 내려가기도 한다. 해수면의 움직임을 주로 달의 인력으로 인해 일어나는데 이를 조석이라 하고 그 높이를 측정하는 것을 조석 관측이라 한다. 이러한 조석은 수심이 바다가 얕은 서해안에서 더욱 두드러지게 보인다. 한편, 바닷물이 밀려 들어와서 해수면이 가장 높아졌을 때를 만조(밀물)라고 하고, 바닷물이 밀려나가 해수면이 가장 낮아졌을 때를 간조(썰물)라고 한다. 이러한 해수면의 높이는 삼각함수로 나타낼 수 있다. ([5])

오른쪽 그림과 같은 날씨 기사를 보면 기온뿐만 아니라 풍속, 파고, 해가 뜨고 지는 시간, 만조와 간조 시간등도 함께 알 수 있다.



2000년 11월 25일자 신문

다음과 같은 자료를 바탕으로 이날의 해수면의 높이를 삼각함수의 일반형 $y(x) = a\cos b(x-\theta)+c$ 로 나타내어 보자.

① 만조 시간은 04시 34분과 17시 03분이고 간조시간은 10시 38분과 23시 07분이므로 주기는 12시간 39분이다.

② 바닷물의 깊이는 만조 때는 7.91m , 간조 때는 0.62m 이었다.

③ x축을 기본 수준면으로 설정한다. 기본수준면의 높이는 평균해수면 아래 4.64m이다.

단계1. 시간 단위로 고치기

⇒ 정의역을 (0, 24) (단위: 시간)로 하면 바닷물의 깊이는

$x = 4\frac{34}{60}$, $x = 17\frac{3}{60}$ 일 때 최대값 $x = 10\frac{38}{60}$, $x = 23\frac{7}{60}$ 일 때

최소값을 가지며 주기는 $T = 12\frac{29}{60}$ 이다.

단계 2. c 구하기

⇒ 기준수준면(x축)이 평균해수면 아래 4.64m이므로 c=4.64

단계 3. a 구하기

⇒ a는 기준면으로부터 고저의 폭의 반이므로 a = $\frac{7.91-0.62}{2} \fallingdotseq 3.65$

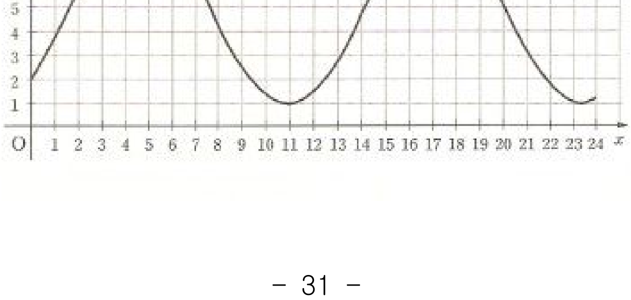
단계 4. b 구하기

⇒ 주기를 T라고 하면 $T=\frac{2\pi}{b}$ 이므로 b=$\frac{2\pi}{T} = \frac{120\pi}{749} \fallingdotseq 0.50$

단계 5. 결정하기

⇒ θ는 처음 만조 시간의 값이므로 $\theta \fallingdotseq 4.57$

따라서 함수 $y(x) = 3.65\cos 0.50(x-4.57)+4.64$ 를 얻는다. 이것을 그래프로 나타내면 다음과 같다.



1. 위에서 구한 식을 이용하여 다음 물음에 답하여라.

(1) 새벽 1시의 해수면의 높이를 구하여라.

(2) 다음날 아침 6시의 해수면의 높이를 위의 식을 이용하여 예측하여 보아라.

2. 오늘의 해수면의 높이를 삼각함수로 나타내어라. ([5])

4) 음속과 삼각함수

1947년 10월 14일, Charles Yeager는 로켓 엔진을 간 Bell X-1을 타고 1220km/시를 기록하며 최초로 음속보가 빠르게 날았다. 비행기가 음속을 돌파 할 때는 폭음이 들리는데, 이는 비행기가 음속을 돌파할 때 생긴 충격파가 지면에 닿으면서 발생하는 것이다. 이 충격파의 모양과 비행기의 속력의 관계에 대하여 알아보자. ([5])

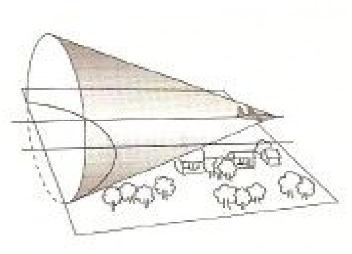
비행기가 음속을 돌파할 때는 비행기의 기수 부분에서부터 원뿔 모양의 충격파가 만들어진다. 이 충격파가 지면에 닿으면 음속 폭음이 생긴다. B가 원뿔(충격파)의 꼭지각의 크기이고, M이 마하 수라면 ($M>1$) $\frac{1}{M}=\sin\frac{B}{2}$로 나타낸다.

1. 음속을 돌파할 때, 음속 폭음이 생기는 이유를 알아보아라.

2. 위의 식을 각 B에 관한 식으로 나타내어라.

3. 마하 2의 속도로 날아가는 비행기의 충격파가 만드는 원뿔의 꼭지각의 크기를 구하여라.

4. 비행기가 날아가는 방향에 따라 원뿔의 모양의 충격파가 지면과 만나는 곡선의 모양이 달라진다. 위의 2의 비행기가 지면과 평행하게 날아가고 있을 때 생기는 충격파와 지면과의 교선은 어떤 모양의 곡선인가?



5. 충격파가 지면과 만나는 곡선 위에서는 서로 다른 지점에 있는 사람일지라도 음속 폭음을 동시에 듣게 된다. 그 이유는 무엇인가? ([5])

5) 감정과 삼각함수

선녀와 나무꾼의 만나서 사는 동안 서로 간에 많은 감정의 교차가 있었다. 감정의 교차는 상대적이었는데, 나무꾼은 좀 변덕스러운 면이 있어서 선녀가 자기를 사랑하는 것 같으면 선녀를 싫어하고 선녀가 자기를 싫어하는 낌새를 채면 반대로 선녀를 좋아하곤 하였다. 반면에, 선녀는 단순한 면이 있어서 나무꾼이 자기를 사랑할 땐 선녀도 나무꾼에 대한 사랑이 우러나고 나무꾼이 자기를 싫어하면 나무꾼에 대한 사랑이 식어가곤 했다.

이제 시간(년) t에서 선녀에 대한 나무꾼이 가지고 있는 열정을 $f(t)$라 하고 나무꾼에 대한 선녀가 가지고 있는 열정을 $g(t)$라 하자.

물론 함수값이 양이면 사랑의 정도를 뜻하고, 음이면 미움의 정도를 나타낸다.

앞에서 언급한대로 서로에 대한 감정의 변화는 서로의 감정에 영향을 받으므로 다음과 같이 설정하여 서로에 대한 이들의 열정을 삼각함수로 나타내어 보자.

① 선녀에 대한 나무꾼의 열정의 변화율은 나무꾼에 대한 선녀의 감정에 비례한다.

② 나무꾼에 대한 선녀의 열정의 변화율은 선녀에 대한 나무꾼의 감정에 비례한다.

나무꾼의 변덕스러움을 식으로 쓰면

$g(t) > 0$ 일 때, $\dfrac{df}{dt} = f' < 0$

$g(t) < 0$ 일 때, $\dfrac{df}{dt} = f' > 0$

이므로, 위의 설정에서 생기는 비례상수는 음수이다. 즉,

$$f'(t) = -ag(t) \quad (a > 0)$$

이고, 선녀의 감정을 식으로 표현하면 양의 비례상수 b가 존재하여

$$g'(t) = bf(t) \quad (b > 0)$$

이다. 편의상 $a = b = 1$로 가정하자. 즉,

$$(*) \quad \begin{array}{l} f'(t) = -g(t) \\ g'(t) = f(t) \end{array}$$

1. (1) (*)으로부터 $f'' = -f$와 $g'' = -g$를 유도하여라.

(2) 일반적인 상수 a, b에 대하여 $y = asint + bcost$의 일・이차도함수

y', y''을 각각 구해서, $y''=-y$임을 확인하여라.

2. 위의 결과에 의하여 두 열정함수 f, g는 다음과 같이 놓을 수 있다.

$$\begin{cases} g(t) = a_1 \cos t + b_1 \sin t \\ f(t) = a_2 \cos t + b_2 \sin t \end{cases} \quad (\text{단, } a_1, b_1, a_2, b_2 \text{는 상수})$$

그들이 맨 처음 만났을 때, 선녀는 자기 날개옷을 감춘 나무꾼이 무지무지 미웠지만 (즉, $g(0)<0$), 반대로 나무꾼은 행복한 감정을 주체할 수 없었다. (즉, $f(0)>0$). 따라서 다음을 가정하자.

$f(0)=2, g(0)=-3$

한편, 그들이 헤어질 때를 $t=\frac{9\pi}{2}$년으로 가정하여 보자. 그 당시 서로간의 증오는 대단했다.

$f(\frac{9\pi}{2})=-1.5, g(\frac{9\pi}{2})=-2$

(1) 위의 조건을 이용하여 두 함수를 구하여라.

(2) 두 함수의 그래프를 그려라.

3. 위에서 구한 그래프를 보고 다음 물음에 답하여 보자.

(1) 선녀가 나무꾼을 처음으로 사랑하게 된 시기는 언제인가?

(2) 선녀가 나무꾼을 마지막으로 사랑한 때는 언제인가?

4. 나무꾼에 대한 선녀의 감정주기는 얼마인가? 또, 사랑과 미움의 감정이 최고일 때의 값은 각각 얼마인가? ([5])

6) 무지개와 삼각함수

"무지개가 무엇인가"에 대한 의문은 고대 그리스 시대 이래로 과학자, 혹은 철학자들도 가지고 있었다. 아리스토텔레스(Aristotle : BC 384 ~ BC 322)는 빨주노초파남보의 무지개의 여러 색깔 중에서 빨강이 가장 순수하다고 주장하였고, 데카르트(R. Descartes)는 이 무지개를 이해하기 위하여 아래 프로그램에서 보이는 것같이 물방울에 입사하는 수천 개의 광선을 작도로서 추적하였다. 데카르트는 스넬과는 별도로 굴절의 법칙을 발견하였고 이를 이용하여 무지개에 대하여 제대로 설명할 수 있게 된 최초의 사람이 되었다. 이보다 먼저 13세기에 살았던 철학자 베이컨은 다른 장소에 있는 관측자는 각기 다른 무지개를 보게 되고 이 무지개는 태양방향에서 약 42도 벌어진 고깔(원추)모양을 이룬다는 것을 관측해 내기도 하였다. 이 무지

개가 대기의 물방울에 의한 것이라는 사실은 1304년에 검증되었고, 1635년 데카르트에 의해 베이컨의 관측을 증명할 수 있게 되었다. 그러나 무지개가 여러 색의 띠를 가진 것에 대하여는, 뉴턴(I. Newton)이 빛의 본성을 설명하고 프리즘 실험을 통에 빛이 여러 색의 요소를 가진 것을 알게 될 때까지 기다려야만 했다. ([22])

데카르트, 뉴턴이 설명한 방법으로 무지개 원리를 알아보자.

햇빛이 구 모양의 물방울에 들어가면 굴절이 되는데, 다음과 같은 물방울에 들어갈 때, 물방울 안에서 부딪힐 때, 그리고 물방울에서 나올 때 굴절이 된다. 빛이 굴절될 때 처음 빛으로부터 꺽인 각의 크기 θ를 편향이라고 한다.

1. 햇빛이 구 모양의 물방울에서 굴절할 때 입사각과 반사각이 같으므로 아래 그림과 같이 α, β가 결정된다.

(1) 다음 그림에서 편향의 합 $D(\alpha)$를 구하여라.

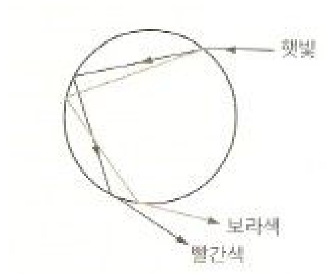
(2) 굴절되는 빛은 편향이 가장 작은 광선 주위로 밀집하게 되어 이 부분에 가장 밝은 부분을 형성하게 된다. 데카르트는 무지개의 원리를 규명하기 위하여 수천 개의 빛을 작도하여 밀집된 빛의 방향을 정확하게 계산할 수 있었다고 한다. 편향의 합이 최소가 되는 즉 $D'(\alpha)=0$이 되는 $\frac{d\beta}{d\alpha}$의 값을 구하여라.

(3) 스넬의 법칙에 의하면 $\sin\alpha = k\sin\beta$ (k는 물의 굴절율)임이 알려져 있다. 위의 식을 α에 대하여 미분하여 $\cos\beta$를 $\cos\alpha$에 대한 식으로 나타내어라.

(4) $\cos\alpha$를 물의 굴절률k에 대한 식으로 나타내어라.

(5) 빛은 빨간색에서부터 주황색, 노란색, 초록색, 파란색, 남색을 거쳐 보라색까지의 파장으로 구성되어 있다. 1666년 뉴턴은 프리즘 실험에서 가각의 색깔들이 서로 다른 굴절률을 가진다는 것을 발견하였다. 빨간색의 굴절률은 1.3318, 보라색의 굴절률은 1.3435이다.

무지개에서 빨간색과 보라색의 각도를 구하여라. ([5])



Ⅲ. 결론 및 제언

우리나라 수학교육 과정에서는 수학에 대한 흥미와 관심을 지속적으로 가지게 하는 것을 기본 목표로 하고 있다. 교사들은 수업에 다양하고 풍부한 자료를 사용함으로써 학생들에게 흥미와 관심을 높여주고 정의적 측면의 학습 교과가 커질 수 있는 기회를 제공해야한다.

본 논문은 고등학교 삼각함수 단원을 택하여 학생들이 어렵고, 재미없고, 지루한 수학 시간을 보다 흥미를 가지고 학생들이 적극적으로 참여할 수 있도록 도와 줄 수 있는 수학사의 자료를 제시하였다. 수학적 개념과 문제 해결의 과정을 수학적 발달 단계를 통해 동기유발을 끌어내고, 실생활에 다양하게 적용되는 예를 이용하여 수학적으로 관찰, 분석, 사고하여 해결하도록 하는 것에 초점을 두었다. 삼각함수와 관련된 실생활 문제는 제시했지만, 풀이 과정을 제시하지 않았으므로, 수학적 모델링을 통해서 학생들에게 적절한 유도가 필요하겠다. 그리고 수준별에 대한 세심한 배려가 부족했다는 아쉬움도 남는다.

수학의 역사와 일화는 학생들에게 흥미 있고 현실감 있게 만들어 주고, 지금의 수학이 그들의 노력에 의해 발견에 의한 과목임을 보여주어 수학적인 생각을 같이 해보는 분위기를 만들 수 있다. 그리고 많은 실생활의 소재를 수학에 도입하여 학생 스스로 문제를 조직하고 구조화하며 그 문제를 해결하고, 실제 상황에서 적용하여 타당성을 검증함으로써 학생들은 자신들의 활동에 의미를 부여할 수 있을 것이다.

앞으로 교사들은 수학사에 대한 중요성과 수학의 실용성을 인식하고 풍부한 지식과 깊은 안목을 갖고 교육 현장에 활용하여 학생들의 학습효과를 높여야 하겠다. 그리고 수학사에 관한 많은 자료들과 실생활에 관련된 문제들을 학생들의 수준에 맞게 재구성하여 수업에 적용 가능 하도록 학습 자료로 개발하고 연구하는 태도를 가져야겠다.

참 고 문 헌

[1] 고호경(2004). 수학사가 학교 수학에 미치는 영향, 한국수학사학회지

[2] 교육인적자원부(2007). 수학과 교육과정, 교육인적자원부 제2007-79호

[3] 김기원/최서윤(2002). 문제 해결력 신장을 위한 실생활 문제 고찰, 자연과학논문집

[4] 김춘영(1992). 수학사를 이용한 초등학교 수학과 교재 개발 연구, 한국 교원대 대학원 석사학위논문

[5] 남호영/박제남(2002). 교실 밖 세상을 풀어버린 수학, 수학사랑

[6] 문정원(2004). 수학사를 활용한 효과적인 삼각함수 지도방안 연구, 숙명여자대 교육대학원 석사학위논문

[7] 박형빈/이헌수(2008). 생활수학을 활용한 효과적인 수학교육 방안, 한국수학사학회지

[8] 수학사랑(1999). 삼각법의 역사, 수학사랑 제15호

[9] 신동원(2005). 실생활 문제의 탐구를 위한 삼각함수의 활용방안, 영남대 교육대학원 석사학위논문

[10] 오소야(2004). 삼각함수의 효율적인 방법에 관한 연구 실생활 문제 중심으로, 한양대 교육대학원 석사학위논문

[11] 원현(2006). 수학사를 활용한 수학교육 10단계 함수단원을 중심으로, 울산대 교육대학원 석사학위논문

[12] 윤종관/이덕호(2002). 고등학교 학생들의 삼각함수에 대한 이해 실태 분석 및 오류 지도에 관한 연구, 한국학교수학회논문집

[13] 이만희(2000). 수학수업의 흥미유발위한 수학사 및 예화자료 연구 수학Ⅰ을 중심으로, 공주대 교육대학원 석사학위논문

[14] 이재돈(1999). 수학교사와 수학교육, 대구대학교 출판부

[15] 정동권(1998). 수학 수업 개선을 위한 수학사의 활용, 과학교육논총

[16] 주성용(2004). 수학표기법의 역사적 고찰 고등학교 수학기호 중심으로, 대전대 교육대학원 석사학위논문

[17] 최수일외 6명(2001). 주기와 주기함수, 수학사랑 교육과정연구팀, 2001

[18] 허민(1997). 수학사와 수학교육, 한국수학교육학회집

[19] 허민(2001). 수학의 실용성에 대하여, 한국수학사학회지

[20] NCTM(1989). Curriculum and evaluation standards for school mathematics, The national council of Teacher of Mathematics.Inc, 구광조, 오병승, 류희찬(공역)1992, 수학 교육 과정과 평가의 새로운 방향, 서울경문사

[22] Maor Eli(2003). 사인코사인의 즐거움, 파스칼북스, 옮긴이 조윤정

[23] Http://physica.gsnu.ac.kr 무지개

[24] Http://classroom.re.kr

[25] Http://www.tmath.or.kr (구 수학사랑)