數學의 論理的 基礎

수학의 논리적 기초

仁荷大學校 人文科學研究所
論文集 第12輯 1986年 11月
Inha University R. I. H. S. 1986

數學의 論理的 基礎

金 榮 振
(文科大學 哲學科)

Logical Foundation of Mathematics

Kim, Young Jin
(Department of Philosophy)

Abstract

Is logic closely related to mathematics? According to Frege and Russell who favor logicism, the answer to the question is "yes." They argue that mathematics is fundamentally based on logic.

In this paper, I examine the logical structure of Euclidean geometry, Non-Euclidean geometries and arithmetic. In partiailar, I have paid much attention to what Hilbert and Gödel have said about the logical characteristics of mathematics.

The conclusion which I have come up with in the present paper can be summarized as follows:

(1) As Russell and Frege argue, logic and methematics are closely related. But I think that they are separate. They are independent.

(2) Although Hilbert takes pains to secure consistency and completeness of mathematical system, he has eventually failed to secure them.

(3) Gödel's proof of incompleteness is limited. But it has very profound implications for mathematics and logic.

국문요약

歷史的으로 말해 수학과 논리학은 서로 완전히 다른 연구 분야였다. 수학은 과학과 연관되었고 논리학은 희랍어와 연관되었다. 수학과 논리학은 近世에 발전되었다. 논리학은 좀더 수학화되었고 수학은 좀더 논리화되었다. 그 結果 이제는 수학과 논리학 사이에서 경계선을 긋기가 완전히 不可能하게 되었다. 事實 양자는 하나이다. 수학과 논리학은 소년과 성인 남자와 같이 서로 다르다. 논리학이 수학의 초기라 한다면 수학은 논리학의 성년기이다.(B. Russell, Introduction to Mathematical Philosophy, p. 194)

I. 서 론

이 논문은 數理哲學에 관한 것이다. 다시 말해 수학을 철학적으로 따져보기 위한 것이다. 철학은 모든 학문의 宗家로서 지금부터 약 2,500년 전에 희랍에서 시작하여 오늘에 이르고 있다. 그 동안 많은 분야가 철학에서 독립해 나갔다. 그러나 전에 없었던 새 분야가 생겨 철학의 영역을 이루고 있다. 수리철학은 언어철학, 과학철학, 生醫倫理學 등과 함께 철학의 새 영역을 이루는 것 중의 하나이다. 哲學의 원래부터 중요한 영역은 形而上學, 認識論, 論理學, 倫理學, 美學이라고 이해되었다. 이 중에서 수학과 관계되는 것은 형이상학, 인식론 그리고 논리학이다. 오늘날에는 言語哲學이 수학의 연구에 밀접히 관련되어 있다. 언어철학에 대한 본격적인 연구는 Frege의 수리철학에 대한 연구의 일환으로 시작되었다.[1)]

이 논문에서 筆者는 수학에 對한 철학적 연구를 가능한 한 논리학에 국한시키고자 한다. 存在論的 접근 방법이나 인식론적 접근 방법이 매우 중요하지만 극히 제한하겠다.

오늘날 수학에 속하는 분야는 실로 많다. 初期의 수학의 영역보다 엄청나게 그 연구 범위가 확장되었고 또 깊어졌다. 잠깐 수학에서 연구되는 몇 가지 중요한 분야를 알아보자. 먼저, 현대수학에는 기본적인 代數系인 군(group), 환(ring), 체(field)와 속(lattice)을 비롯하여 homology 대수학에 쓰이는 권(category)과 함수의 개념이 도입되어 있다. 또, 정수의 성질을연구하는 정수론은 그 증명하는 방법이 대수적인가 해석적인가에 따라 각각 대수적 정수론과 해석적 정수론으로 나뉘어진다. 이 분야에 있어서 저 유명한 Fermat의 대정리는 300여년이 지난 지금까지도 완전한 증명에 도달하지 못하고 있다.

1) G. R. Searle, ed., *The Philosophy of Language* (Oxford Univ. Press, 1971), pp. 1-6. 참조.

기하학에는 좌표를 이용하는 해석기하학과 그렇지 않은 종합기하학(사영기하학이 여기에 포함됨)이 있다. 그리고 유클리드 기하학과 대비되는 쌍곡선형 非유클리드 기하학과 타원형 비유클리드 기하학이 있는데 여기에 대한 견해의 차이는 Klein의 에를랑겐 프로그램으로 해결되었다. 그 요지는 공간의 변환군에 의하여 불변인 성질을 연구하는 것이 기하학이며, 따라서 군이 달라지면 기하학이 달라진다는 견해이다.

위에서 언급한 것 이외에도 수학에서 연구되는 분야는 많다. 우선 미적분학이 있고 미적분학을 이용하는 미분기하학이 있다. 또 대수학이 크게 발전함에 따라 n次 式으로 나타나는 대수곡선과 대수곡면을 연구하는 대수기하학이 있다. 그리고 位相數學, 集合論, 복소수해석학, 선형작용소론, 초합수론 등 실로 많은 분야가 있다. 그러기에 오늘날 전문적인 수학자일지라도 수학의 한두 분야에는 정통할 수 있지만 다른 분야에 대해서는 전혀 모를 수도 있다.

필자는 이 논문에서 수학의 전 분야를 철학적으로 다룰 생각은 없다. 다만 유클리드 기하학과 비유클리드 기하학, 그리고 산술에 관한 이론을 골라 이들의 論理的 구조를 분석하고, 그리고 좀더 나아가 몇 가지 제시된 이론들을 철학적으로 검토하고자 한다.

Ⅱ. 基本 槪念에 대한 定義

현대의 수학 분야에는 數學基礎論이라는 것이 있다. 이는 20세기에 들어와 정립된 새로운 분야이다. 이 분야에서 우리는 세 가지의 중요한 이론을 발견할 수 있다. 그 첫째가 論理主義요, 둘째가 直觀主義이고 세째가 形式主義이다.

論理主義(logicism)란 간단히 말해 수학을 논리학에 환원시키려는 것으로서 Frege와 Russell 등에 의하여 주창되었다. 논리주의는 두 가지의 특징을 가진다. 첫째, 가장 기본적인 순수 수학의 모든 개념을 순수 논리학 안에서 정의하려고 하며, 둘째, 순수한 논리학적인 성질을 가지고 있는 證明 방법과 논리학의 기본적인 원리만으로 모든 순수 수학의 정리를 증명한다. 이와 같은 입장에서 Russell은 수학을 구성함에 있어 다의적이며 부정확한 일상 언어의 사용대신 기호를 사용해야 한다고 주장했다.[2)]

필자는 이 논문에서 논리주의와 꼭같은 결론에 도달할 생각이 없다. 서론에서 밝힌 바와 같이 기하학이나 산수(대수학)의 몇 가지 體系가 어떠한 논리적 특징을 가지고 있는가를 밝히고 또 부분적인 비판을 하려고 할 뿐이다. 그러기 위해 먼저 몇 가지 기본적인 논리적 개념을 정의하고자 한다.

2) 林禎垈, 數學의 *存在*와 認識(서울 : 淸文閣, 1985), p.5.

1. 논리 또는 논리학

Peirce가 지적한 바와 같이 논리 또는 논리학이라는 말은 여러가지 방식으로 정의되고 있다. Peirce의 주장대로 한다면 100가지가 넘는다. 흔히 논리학은, 매우 느슨하게, 추리를 다루는 과학이라고 정의되지만 이러한 정의는 너무 심리적이다. 그러나 엄밀한 정의에 의하면, 논리학은 올바른 논의를 올바르지 못한 추리로부터 구별하는 데 있어서 사용되는 방법과 원리를 탐구하는 학문이다.[3] 혹자는 변증법을 논리학이라고 하는데 이것은 잘못이다. 변증법은 논리학에 속하기보다는 形而上學에 속한다고 할 수 있다. 그리고 변증법은 수학과 直接的인 관계가 거의 없다.

논리학에는 必然性이 요구되는 연역법과 개연성만이 보장되는 귀납법이 포함된다. 여기서 우리는 논리학의 범위가 어떻게 決定되는가를 알아둘 필요가 있다. 論理主義者들은 수학을 논리학으로부터 연역할 수 있다고 하면서 논리학의 범위를 확장한다. 실제로 Russell은 집합을 논리에 포함시킴으로써 논리의 범위를 확장했다. 그래서 많은 비판을 받았다.[4] Quine은 집합은 논리에 포함될 수 없다고 주장하면서 Russell을 비판했다. S. Haack이 말한 바와 같이 논리학의 범위를 정확히 하기란 매우 힘든 일이다.[5] 어떤 학자들은 논리학의 범위를 명제 계산과 양화이론에 制限시켜야 한다고 제의한다. 그러나 필자는 Russell처럼 집합을 논리에 포함시키는 것은 큰 문제가 되지 않는다고 생각한다.

2. 연역법과 妥當性(validity)

수학에는 수학적 귀납법이 부분적으로 사용된다. 그러나 앞으로 다룰 유클리드기하학, 非유클리드 기하학, 산수 등의 이론 체계를 정확히 분석하기 위해서는 연역법과 타당성에 對한 개념적인 이해가 매우 중요하므로 이들을 먼저 정확히 짚고 넘어갈 필요가 있다.

妥當性이란 아주 간단히 말해 연역적 논의(argument)의 성질이다. Brody에 의하면 귀납적 추리는 타당성과 관련이 없다.[6] 그러면 연역적 논의란 무엇인가? 먼저 논의란 무엇인가? 논의는 명제나 진술과 다르다. 논의는 반드시 두 가지 이상의 명제나 진술로 구성된다(물론 전제가 없는 (zero-premise conclusion)것이 있긴 하지만) 또한 논의에는 前提와 결론이 있게 마련이며 전제는 결론의 진리성을 보장할 수 있어야 한다.[7] 그렇지 못하면 비록 진술·명제

3) I. Copi, *Symbolic Logic*, p. 1.

4) H. Putnum, "The Thesis that Mathematics is Logic," *Putnum, Mathematics Matter and Method* (1979), pp. 12f.

5) S. Haack, *Philosophy of Logics* (Cambridge Univ. Press, 1978), pp. 8-10 참조.

6) B. Brody, *Logic: Theoretical and Applied*, Chap. 5 참조.

7) Copi, ***op. cit.***, p. 2.

의 집합이라도 논의가 되지 못한다. 다시 말해 연역적 논의도 귀납적 논의도 되지 못한다. 예를 들어 다음과 같은 명제의 집합이 있다고 생각해 보자 :

꽃이 정원에 아름답게 피어 있다.
소크라테스는 희랍 사람이다.
―――――――――――――――
∴ 하늘은 푸르고 아름답다.

위의 추리(推理)는 전제와 결론 간에 어떠한 관련성도 없다. 전제가 결론의 진리를 보장할 어떠한 근거도 제공하지 못하고 있다. 위의 경우와 달리 다음과 같은 명제의 집합을 생각해 보자.

지금까지 관찰된 모든 고니는 흰색이다.
―――――――――――――――
그러므로 모든 고니는 흰색이다.

위의 논의는 귀납적 논의이다. 전제와 結論 사이에 必然性이 없다. 前提의 참을 긍정하고 結論의 참(眞)을 부정해도 모순이 생기지 않는다. 전제와 결론 간에는 오직 개연성밖에 없다.

연역적 추리는 귀납적 추리와 매우 성격을 달리한다. 다음 예를 생각해 보자.

모든 사람은 죽는다.
김 영진은 사람이다.
―――――――――――――――
∴ 김 영진은 죽는다.

위의 추리는 연역적 추리이다. 전제가 참이면 결론도 반드시 참이다. 다시 말해, 전제가 맞으면 결론도 반드시 참이다. 전제가 맞으면 결론은 맞지 않을래야 맞지 않을 수 없다. 전제를 긍정하면서 결론의 참을 부정하면 모순이 생긴다.

妥當性이란 위에서 간단히 설명했지만 연역적 논의의 성질이다. 學者에 따라 조금씩 다르긴 하지만, 명제 또는 진술의 외연을 眞·僞라 하고 연역적 논의의 성질을 타당성 또는 비타당성이라고 한다. 타당성이란 만약 전제가 맞으면 결론도 반드시 맞을 수 밖에 없도록 전제와 결론이 연결된 연역적 논의의 성질이다.

이제 좀더 나아가 다음의 논의를 생각해 보자.

All trouts are mammals.
All mammals have wings.
―――――――――――――――
Therefore, all trouts have wings.

위의 연역적 논의에서 전제와 결론은 다 僞이다. 그러나 논의(argument)는 타당하다. 왜냐

하면, 가정상 전제가 眞이라면 결론도 眞일 수밖에 없도록 전제와 결론이 연결되어 있기 때문이다. 그러나 이러한 연역적 논의가 타당하다고 해서 결론이 事實上 眞이라는 보장은 없다. 그러기에 논리학에서는 전제가 실제로 眞이면서 결론도 논리적으로나 실제적으로 眞인 그러한 논의를 특히 건전하고 타당한 논의(sound and valid argument)라고 부른다. 연역적 논의의 타당성은 엄밀하게 말하면 연역적 논의의 形式에 의해 결정되는 것이지 그 내용이나 명사의 의미에 의해 결정되는 것이 아니다. 그러나 실제로는 연역적 논의의 타당성이 형식적 요소이외의 요소에 의해 결정되는 것이 사실이다.[8)]

妥當性이란 좀더 상세히 말하면, 文章論的으로 정의될 수도 있고 意味論的으로 정의될 수도 있다. 形式的 體系 內의 公理나 규칙에 의해 정의될 때 우리는 이를 妥當性에 對한 syntactical definition이라 하고 體系에 對한 해석에 의해 정의될 때 이를 意味論的 정의라 한다.[9)] 오늘날 학자들은 수학적 체계나 논리적 체계를 문장론적으로 뿐만 아니라 의미론적으로도 그 妥當性을 따진다.

3. 證明과 연역

앞에서 연역적 논의와 연관하여 타당성의 개념을 검토했다. 그러면 증명이란 무엇인가? 연역적 논의의 타당성과 증명은 서로 어떻게 다른가? 이 질문은 매우 중요한 것이다.

證明을, 우리말 사전(신 기철 · 신 용하 편저)에서는, "어떤 사실이나 결론이 진실이거나 진리임을 밝힘. 어떤 사물이나 또는 판단의 참과 거짓을 정하는 근거를 표시함이다"라고 정의하고 있다. 증명은 연역과 약간 다르다. 전제로부터 결론을 연역하는 것은 오직(필요조건의 의미에서) 그 전제가 眞이라는 것이 이미 알려져 있을 때에만 그 결론을 증명하는 것과 같게 된다.[10)] 兩者의 차이점을 좀더 명백히 하기 위해 다음의 논의를 이용해보자.

All pigs are mammals.
All mammals fly.

All pigs fly.

위의 논의는 연역적 추리요 분명히 타당한 것이다. 소전제는 참이요 대전제는 僞이다. 그러나 가정상 대전제와 소전제가 꼭같이 맞다고(眞) 한다면 결론도 반드시 맞게 마련이다. 다시 말해, 위의 논의는 타당하지만 결론이 맞다는 것을 증명하지는 못한다. 뒤에 구체적으로 살피겠지만 유클리드 기하학에 있어서 공준 또는 공리는 증명될 수는 없지만 기본적인 전제로서 참이며 自明한 것이라고 생각되었다. 그리고 모든 정리는 연역적으로 참인 것으로 증명된다고 생각되었다.

8) S. Barker, *Philosophy of Mathematics* (Prentice-Hall, Inc., 1964), pp. 37-41.참조.
9) S. Haack, *Philosophy of Logics*, pp. 13-14.참조.
10) Barker, *op. cit.*, pp. 17-18.참조.

4. 反對와 矛盾

수학과 논리학에서는 일관성 또는 무모순성(consistency or noncontradiction)의 개념이 매우 중요한 위치를 차지한다. 이러한 개념들을 제대로 이해하기 위해 먼저 反對와 矛盾의 개념을 알아보는 것이 좋겠다.

反對(contrary)와 矛盾(contradiction) 간의 차이점은 다음과 같이 밝혀질 수 있다(실제로 antinomy와 paradox도 포함되기 때문에 범위를 더 확장해야겠지만 여기서는 그 범위를 좁히겠다). 첫째, 판단이나 명제의 次元에서가 아니라 概念의 次元에서 비교될 수 있다. 예를 들어 "흑"과 "백"과 그리고 "高"와 "低"의 개념을 각각 비교해 보자. 흑과 백의 두 개념 사이에 우리는 중간 개념을 생각할 수 있다. 高와 低에 對해서도 마찬가지 생각을 가질 수 있다. 이와 같이 두 개념 사이에 중간 개념을 생각할 수 있을 때 우리는 두 개념의 관계를 反對관계라고 한다. 분량과 정도의 차이를 가진 두 同位概念으로 그 중간에 제 3자의 개념이 용납될 여지가 있는 개념을 反對概念이라 한다.[11]

위의 예와 달리 "生"과 "死"의 두 개념과 "有"와 "無"의 두 개념을 각각 比較해 보자. 生과 死의 두 개념 사이에는 어떠한 중간개념도 있을 수 없다. 有나 無의 경우에도 마찬가지다. 이와같이 同一한 類概念에 포섭되는 同位概念으로서 그 質이 전연 상반하여 서로 배척하되 그 중간에 제3자(제3의 개념)를 용납치 않는 두 개념을 矛盾概念이라 한다.

그러나 때때로 문제가 있을 수 있다. K. Marx가 말하는 "proletariat"와 "bourgeoisie"의 두 개념은 어떻게 해석하는가에 따라 서로 反對 개념일 수도 있고 矛盾 개념일 수도 있다. 만약 어떤 브르죠아지도 프로레타리아가 아니라고 생각하고 또 兩者 사이에는 어떠한 중간 계급도 있을 수 없다고 하면 양자의 관계는 矛盾 관계가 된다. 그러나 해석을 달리해 만약 실제적으로 뿐만 아니라 개념적으로도 브르죠아지에도 프로레타리아에도 속하지 않은 중간 계급이 있다고 생각한다면 두 개념은 서로 反對 개념이라고 할 수 있다.

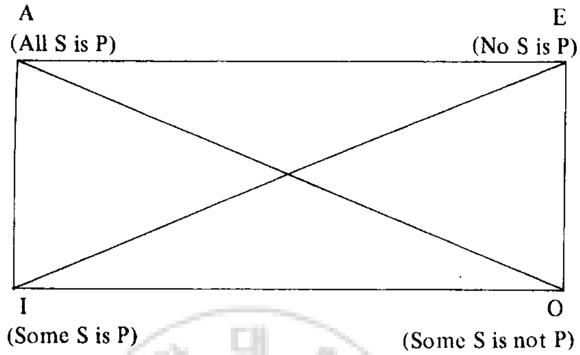
둘째, 判斷이나 命題의 차원에서 反對와 矛盾의 차이점을 말할 수 있다. 筆者는 이러한 次元에서 좀더 정확히 세 가지 절차를 밟아 兩者 간의 차이점을 밝히는 것이 좋다고 생각한다.

먼저, 다음과 같은 두 명제를 비교해 보자. "It is cold here."라는 판단과 "It is hot here."라는 두 판단은 서로 반대 관계라 할 수 있다. 왜냐하면, 만약 여기의 기후가 춥지도 덥지도 않다면 두 판단은 꼭같이 틀릴 수 있기 때문이다. 일반적으로 두 명제 사이에 있어서 한 명제가 眞일 때 다른 명제는 僞이면 두 명제는 서로 모순된다고 말한다. 그러나 두 명제가 꼭같이 眞일 수는 없으나 꼭같이 僞일 수 있는 경우 우리는 두 명제가 서로 反對된다고 말한다.

11) 朴鋒鴻, 一般論理學(白映社, 4291), p. 33.

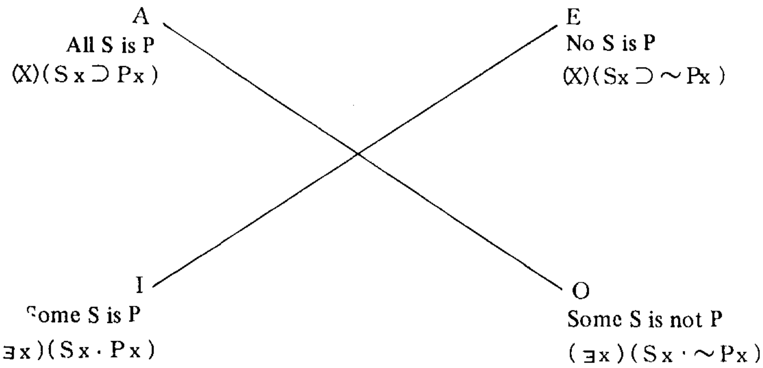
"It is cold here."에 반대되는 명제는 "It is hot here."이고 모순되는 명제는 "It is not cold here."이다. "It is cold here."가 眞이면 "It is not cold here."는 반드시 僞이며 그리고 그 逆도 성립한다.

다음으로, 反對와 矛盾 간의 차이점을 傳統 論理學의 A, E, I, O의 대당관계에서 따져볼 수 있다. 아리스토텔레스의 논리학에서 위의 네 판단은 다음과 같이 도식화된다.

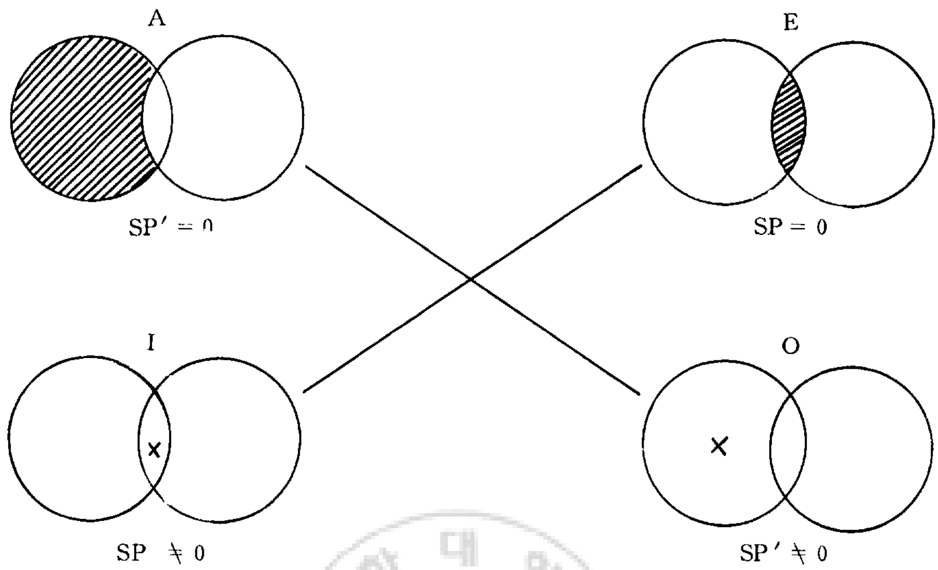


위의 대당관계에서 A와 E는 서로 反對되며 A와 O 그리고 E와 I는 서로 모순된다. 傳統 論理學에서는 主語 S에 해당되는 集合의 요소가 있다는 것을 전제로 하고 出發한다. 따라서 反對, 矛盾, 소반대, 그리고 대소 관계, 모두가 다 성립한다.

그러나 또 다음으로 現代 논리학의 해석대로 한다면, A, E, I, O의 대당관계에 있어서 오직 모순 관계만이 성립하고 反對 관계 등 기타 관계는 성립하지 않는다. 그 理由는 Boole의 해석대로 全稱判斷의 경우 주어(S)에 해당하는 집합의 요소가 있다는 것을 전제하지 않기 때문이다. 다시 말해 존재론적 의미(existential import)를 전제하지 않고 오직 공집합의 개념으로 해석하기 때문이다. 이와 같이 전통 논리학과 현대 논리학은 그 出發點부터 현저한 차이를 가지고 있다. A, E, I, O의 네 명제는 현대 논리학에서 다음과 같이 도식화된다.



그리고 위의 네 명제는 Venn Diagram의 방식으로 다음과 같이 표시된다.



傳統 논리학과 現代 논리학의 차이점은 다음과 같이 요약될 수 있다. 첫째, 바로 위에서 언급한대로 두 논리학은 기본적인 출발점이나 가정을 달리한다. 현대 논리학은 Boole의 해석 방법을 따른다. 근본적인 차이점은 존재론적 의미에 대한 해석에서 나타난다. 둘째, 전통 논리학에서는 A와 I 그리고 E와 O 간의 차이점은 오직 전칭과 특칭의 차이에만 있을 뿐이다. 그러나 현대 논리학에서는 A와 I의 차이와 E와 O 간의 차이는 단지 전칭과 특칭의 차이에만 있는 것이 아니다. 이는 조건문과 연어문 간의 차이에서 근본적으로 나타난다. A와 E는 단순함축(material implication, ⊃)의 기호로 표시되고 I와 O는 연언(•)의 기호로 표시된다. 세째, 전통 논리학에서는 S가 주어의 역할을 하지만 현대 논리학에서는 일종의 술어 역할을 한다. 현대 논리학에서는 어떤 X에 대한 존재론적 위임(ontological commitment)이 성립되고 그러한 X가 S라는 성질을 가지는 것이라고 해석한다. 文法的 기능보다는 논리적 기능을 더 중시하는 것이다. 現代 논리학의 量化理論은 Frege, Peirce, 그리고 Quine 등에 의하여 괄목할 발전을 하였다. 네째, 위의 Venn diagram에서 나타난 것과 같이 현대 논리학에서는 오직 A와 O 그리고 E와 I 간에는 단지 모순관계만 성립할 뿐 다른 관계는 성립하지 아니한다.

지금까지 우리는 反對와 矛盾의 차이를 이모저모로 살펴봤다. 그러면 수학에서 말하는 일관성(consistency) 또는 무모순성은 무엇을 말하는가? 어떤 수학적 체계가 일관성을 가지고 있다거나 또는 무모순적이라고 말한다면 그것은 무엇을 뜻하는가? 그것은 그러한 수학적 체계 내에서 어떤 연역적 추리가 이루어질 때 명제 간에 어떠한 모순적인 관계도 성립하지 않음을 의미한다. 약간 달리 의미론적으로 표현하면, 그 수학적 體系 내의 모든 진술이나 명제가(또는

명제 함수가) 眞이라고 해석할 수 있는 方法이 적어도 하나 있음을 意味한다.

整合性(coherence)과 관련하여 일관성 또는 무모순성을 다음과 같이 비교해서 설명할 수도 있다. 예를 들면 "2+2=4"와 "씨저는 루비콩 江을 건넜다."라는 두 명제 간에는 어떠한 모순도 성립하지 않는다. 따라서 우리는 두 판단 간에는 일관성이 성립하며 서로 무모순적이라고 말할 수 있다. 그러나 두 판단 간에는 어떤 상호 연관성도 없다. 두 판단은 서로를 지지하지 않는다. 따라서 우리는 두 판단 간에는 일관성은 성립하지만, 정합성은 성립하지 않는다고 말할 수 있다.[12] 그러나 公理의 眞理値를 따지지 아니하고 또 기본적인 명사의 의미를 따지지 아니하는 순수한 形式的인 수학의 체계 내에서의 일관성이나 무모순성은 文章論的으로만 정의된다. 相互 간의 적절성을 따지는 整合性의 문제는 별로 중요하지 않다. 우리는 이러한 例를 Hilbert의 形式主義的인 수학의 체계에서 발견할 수 있다.

5. 완전성(Completeness)

이제 完全性의 개념을 검토해 보자. 이 개념은 일관성 또는 무모순성의 개념과 더불어 현대 논리학의 근간을 이루는 가장 중요한 개념 중의 하나이다.

완전성이란, 느슨하게 말하면, 어떤 수학적 체계 내의 定理치고 정리로서 증명되지 않는 것이 없음을 말하는 개념이다. Russell과 Whitehead는 그들의 大著인 數學의 原理(Principia Mathematica)에서 완전성의 문제를 다루지 않았다. 그러나 Hilbert를 위시한 形式主義者들은 일관성의 문제와 아울러 完全性의 문제에도 깊은 관심을 가졌다. Hilbert는 1930년에 발표한 논문인 "수학의 기초"에서 證明論으로서 무모순성의 문제뿐만 아니라 완전성의 문제도 해결될 것이라고 낙관했다. 그는 실제로 산수의 분야만을 포함하는 다소 인위적인 形式體系를 구성하고 그 체계 내의 무모순성은 물론 완전성을 밝히는 데 성공했다고 말했다. 그러나 이러한 主張은 1931年 Gödel에 의해 깨어지고 말았다. Gödel은 "Principia Mathematica에 있어 形式的 未決定的인 命題 및 이와 관련된 體系에 關하여"라는 논문을 발표하였다. 바로 이 논문에서 그는 무모순성(일관성)과 완전성의 관계에 대한 매우 중요한 새로운 주장을 하였다. 그의 주장은 첫째, 산수의 全 領域을 포함하기에 充分한 包括的인 체계의 일관성 또는 무모순성을 초수학적으로 증명하려는 시도는 그 초수학적 증명 자체가 그 체계 내에서의 정리를 연역하는 데 있어서 사용되는 變形의 規則보다 훨씬 더 강한 추리의 규칙을 적용하지 않는 한 불가능하며 둘째, 산수의 체계가 시도된 Russell과 Whitehead의 "수학의 원리"의 체계나 기타 다른 어떤 체계도 本質的으로 不完全하다는 것이다. 바꾸어 말해, "산수적 공리로 이루어진 어떠한 무모순적인 집합이나 체계가 있다고 하더라도 항상 그러한 산술적 공리의 集合에서부터 연역되지는 않지만 眞인 산술적 진술이나 명제가 있다"로[13] 요약될 수 있다. Gödel의 두 가지 주장 가운데

---

12) J. Hospers, *An Introduction to Philosophical Analysis*, pp. 116-117.

13) E. Nagel and J. R. Newman, "Gödel's Proof," I. Copi and James Gould, ed., *Contemporary Readings in Logical Theory* (The Macmillan Company, 1967), pp. 64-65.

둘째 것이 첫째 것보다 더 중요하다. 여하간 Gödel의 主張의 핵심은 일관성과 完全性은 兩立 不可能하다는 것이다.

끝으로, Barker 교수가 주장하는 대로 完全性은 해석된 수학의 체계와 관련하여 논의될 수도 있고 해석되지 않은 수학의 체계와 관련하여 논의될 수도 있다.[14] 後者의 경우 眞理의 문제는 대두되지 아니 한다.

Ⅲ. 유클리드 기하학의 논리적 체계

이제 구체적으로 수학의 논리적 체계를 하나씩 검토해 보자. 먼저 유클리드 기하학부터 시작하자.

수학의 여러 영역 가운데 최초로 논리적·연역적 체계를 세운 것은 유클리드 기하학이다. 그러나 유클리드 기하학의 출발은 연역적·추상적이 아니었다. 구체적이고 경험적이었다. 유클리드 기하학은 먼저 에짚트인들에 의해 경험적·귀납적 지식으로 축적되었다. 그들은 Nile江의 범람 때문에 측량술이 필요했다. 그래서 경험적으로 기하학의 지식을 쌓아 갔다.

그러나 희랍인들은 달랐다. 에짚트인들이 구체적이고 실천적이었다면 희랍인들은 理論的·추상적이었고 또 연역적이었다. 그들은 기하학의 原理 그 自體에 관심을 가졌고 또 절대적으로 참이면서 보편적인 원리를 얻고자 했다. 이러한 특징은 Thales, Pythagoras 그리고 Plato를 이어오면서 더욱 더 현실적으로 나타났고, B.C. 3세기 경에는 드디어 Euclid의 기하학의 原論 (The Elements)이 나타나게 되었던 것이다.

그러면 유클리드 기하학의 논리적 특징이나 구조는 어떤 것인가? 이를 알기 위해서는 먼저 그의 著書를 분석하는 것이 첩경이다. 그의 기하학의 원론 第1巻은 먼저 다음과 같은 定義로 시작한다(편의상 중요한 것만 적는다).[15]

1. 點이란 부분이 없는 것이다.[16]
2. 線이란 폭이 없는 길이이다.
4. 직선이란 선이며 점이 그 위에 한결같이 놓여 있는 것이다.
5. 面은 길이와 폭만 갖는 것이다.
7. 평면이란 面이며 직선이 그 위에 한결같이 놓여 있는 것이다.
8. 평면의 각이란 同一 평면 위에 있으면서 만나는 두 직선에 있어 서로의 기울어짐이다.

14) Barker, *op. cit.*, p. 94.
15) Euclids, *The Elements* (The Great Books Foundation, 1912), pp. 3-4.
16) 원래 희랍인들은 점을 아주 작기는 하지만 크기가 있다고 생각했다.

10 . 한 직선이 다른 직선과 만날 때 이루어지는 서로 비슷한 각이 서로 같으면 같은 각을 각각 直角이라고 부른다. 또, 이 때 한 쪽의 선분을 다른 직선과 수직이라고 한다.

14 . 도형이란 하나 또는 몇 개의 경계에 의해 둘러 싸인 것이다.

15 . 원이란 하나의 선에 의해 둘러 싸인 평면 도형이며 그 중의 한 점으로부터 그 선에 이르는 선분이 모두 같도록 되어 있다.

23 . 평행선이란 동일 평면 위에 있고 어느 방향으로 얼마든지 연장시켜도 절대로 만나지 않는 직선이다.

위에서 열거한 定義 이외에도 三角形에 對한 정의 여섯 가지, 그리고 四角形에 對한 정의 여섯 가지 도합 35가지가 있다.

다음으로 다섯 가지 공준(postulates)을 아래와 같이 열거하고 있다.[17)]

1 . 한 점에서부터 다른 한 점으로 직선을 그을 수 있다.

2 . 선분(직선)은 얼마든지 연장될 수 있다.

3 . 주어진 점을 중심으로 하고 주어진 반지름을 갖는 원을 그릴 수 있다.

4 . 직각은 서로 같다.

5 . 한 직선이 다른 두 직선과 만나서 어느 한 쪽에서의 두 내각을 이루면 그들 두 직선을 한없이 연장시킬 때 그들의 내각이 있는 쪽에서 그들(두 직선)은 반드시 만난다.

위의 다섯 가지 공준은 주로 기하학과 관계되는 원리이다. 다음으로 유클리드 기하학에서는 여러 가지 公理가 있다. 이 중에서 중요한 다섯 가지를 적으면 다음과 같다.

1 . 同一한 것과 같은 것은 서로 같다.

2 . 같은 것에 같은 것을 각각 더하면 전체는 같다.

3 . 같은 것에 같은 것을 빼면 남는 것은 서로 같다.

4 . 서로 일치하는 것은 서로 같다.

5 . 전체는 부분보다 크다.

공준과 달리 공리는 기하학에서 뿐만 아니라 일반적으로 적용되는 眞理이다. 이제까지 열거한 정의, 공준, 공리는 유클리트 기하학의 기본이 되며 이 밖의 다른 모든 기하학적 법칙(정리)을 이들에 의거하여 연역적으로 증명할 수 있다고 생각했다.

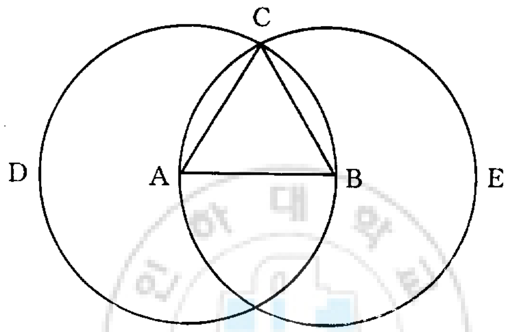
이제 여기서 Euclid의 구체적인 방법을 이해하기 위해 하나의 實際的인 例로 그의 저서 제 1권의 명제 1이 어떻게 연역적으로 증명되는가를 살펴보자.

17) 오늘날에는 공준과 공리를 함께 묶어 axioms라 한다.

명제 1 : 문제[18)]

(주어진 선분 위에 정삼각형 그리기)

AB를 주어진 선분이라고 하자. 지금 AB 위에 정삼각형을 그리는 것이 요구된다. 먼저 A를 중심으로 하고 AB를 반지름으로 하는 圓 BCD를 그린다(공준 3에 의거). 또, B를 중심으로 하고 BA를 반지름으로 하는 원 ACE를 그린다(공준 3에 의거). 이 두 원의 만나는 점 C와 점 A, B를 각각 잇는다(공준 1). 그러면 점 A가 원 CDB의 중심이므로 AC가 AB와 같다(정의 15에 의거). 또, 점 B는 원 CAE의 중심이므로 BC가 BA와 같다(정의 15).



그러나 CA는 또 AB와 같다. 따라서 선분 CA와 CB는 모두 AB와 같다. 따라서 공리 I에 의하여 CA는 CB와 같다. 고로, 선분 CA, AB, BC는 서로 같다. 따라서 三角形 ABC는 정삼각형이다. 그리고 그것은 주어진 선분 AB 위에 있다.

우리는 지금까지 명제 1을 증명하는 데 있어서 공준, 공리, 정의가 어떠한 역할을 하는가를 살펴봤다. 지금부터는 유클리드 기하학의 논리적 특징을 종합적으로 정리하고 아울러 철학적 次元에서 Euclid의 기하학이 어떻게 이해될 수 있는가를 간단히 살펴보기로 하자.

첫째, Euclid는 위의 명제 1뿐만 아니라 다른 모든 명제도 공준과 정리, 그리고 정의에 의거 연역적으로 도출될 수 있다고 생각했다. 그런데 Euclid는 공준, 공리 그리고 정의가 전제가 되고 정리가 결론이 되는 연역적 논의의 타당성만을 주장한 것이 아니라 한 걸음 더 나아가 정리를 증명하였다(우리는 앞에서 연역적 타당성과 증명 간의 차이점을 이미 설명하였다). 만약 그가 연역적 타당성만을 염두에 두었다면 僞인 전제에서 僞인 결론을 도출할 수 있었을 것이다. 왜냐하면, 이미 언급한 바와 같이 僞인 전제로부터 僞인 결론이 도출되는 추리가 연역적으로 타당할 수 있기 때문이다. 그러나 Euclid가 실제로 추구한 것은 眞인 전제에서 眞인 결론

18) Euclid 기하학에 있어서 명제는 두 종류이다. 한 종류는 문제이고 다른 종류는 정리이다.

을 연역하는 것이었다. 다시 말해 그는 건전하면서도 타당한 추리, 즉 증명을 의도했던 것이다.

둘째, Euclid는 기하학적 법칙을 보편적인 形式으로 定式化하였다. 그것은 어떠한 特定한 선, 각, 넓이에 관한 성질을 다루는 것이 아니라 모든 선, 각, 넓이에 관한 일반성이 있는 명제에 대해 엄밀한 표현 방법을 사용하는 것이었다. 그의 기하학은 一般性과 抽象性의 특징을 가지고 있었다.

세째, 유클리드기하학에 있어서 우리는 循環論法의 오류를 피하려는 點을 인지할 수 있다. 만일, 한 기하학적인 법칙에서 출발하여 다른 새로운 법칙을 연역하고 다시 그것으로부터 다른 법칙을 연역하여 마지막으로 연역된 법칙으로부터 다시 맨처음에 출발한 법칙을 얻게 된다면 이는 분명히 순환논증의 오류를 범하는 것이 된다. Euclid는 이러한 오류를 피하기 위해 그의 기하학의 법칙을 두 부류로 나누었다. 그는 첫째 부류의 법칙은 증명할 수는 없지만, 기본적인 전제로 채택될 수 있으며 절대적으로 참이며 또 自明한 것이라고 생각했다. 이미 말했지만 그는 이러한 법칙을 공준 또는 공리라고 불렀다. 그리고 그렇지 않은 둘째 부류의 법칙을 정리 또는 명제라고 하였다.

네째, 유클리드 기하학이 약 2,000년 以上 버티었고 또 Kant에 의해 철학적 확실성이나 필연성을 부여받았지만 여러 가지 논리적인 하자를 가지고 있었음이 분명하다. 여기서는 꼭 한 가지만을 지적하고 지나가겠다. 위에서 설명한 명제 1에서 논리적 결함이 발견된다.[19] 그것은 유클리드 기하학의 증명 중에서 먼저 점 A와 B를 각각 중심으로 하고 두 점 A, B 사이의 거리를 반지름으로 하는 두 원을 그리면 점 C와 같은 교점이 꼭 하나 存在해야 한다는 근거가 유클리드 기하학의 公準 體系에는 없다는 點이다. 이를 보충하기 위해서는 가령 "어떤 線(가령 원주 ACE와 같은)이 두 부분으로(원의 안과 바깥 부분과 같이) 나누어지는 도형(여기서는 平面)에 완전히 포함되고, 또 그 선이 두 부분의 양쪽으로 공통인 點을 적어도 하나 가진다면 그 선을 두 부분의 사이에서 경계선과 만나지 않으면 안 된다"와 같은 추가적인 공준을 만들어 이 체계에 첨가하지 않으면 안 된다. 다시 말해, 이와 같이 추가적인 공준이 더해지지 않는 한 명제 1의 결론은 앞에서 사용한 공준, 정의 또는 공리로부터 논리적으로 연역되지 않는다. 즉, 논리적인 비약이 생긴다. Euclid나 기타 수학자들이 명제 1을 쉽게 받아들일 수 있었던 것은 그들이 명제 1의 圖形을 봤을 때 C와 같은 點이 존재해야 한다는 것을 너무나 명백한 것으로 받아들였기 때문이다. 이러한 논리적 하자에 對한 비판과 반성은 後에 수학자와 철학자들이 새로운 접근법을 시도하는 계기가 되었다.

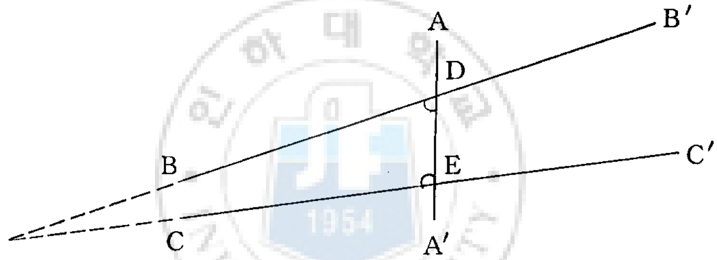
다섯째, Euclid는 기하학의 문제만 다루었지 철학적 문제에 대해서는 별다른 노력을 하지 않았다. 그래서 시대가 흘러갈수록 기하학에 대한 定義의 문제와 함께 인식론적인 문제 그리고

19) Barker, *op. cit.*, pp. 38-39.

存在論的 문제 등이 대두되었다. 여러 철학자들 중 Kant는 유클리드 기하학에 대한 철학적 음미를 가장 철저히 하였다. 그는 유클리드 기하학은 인식론적 내지 존재론적 관점에서 볼 때 先天的 綜合判斷의 성격을 띠고 있다고 보았다. 그리고 그는 유클리드 기하학의 지식은 필연적이며 보편타당하다고 보아 어떠한 다른 기하학의 體系도 성립될 수 없음을 主張했다. 그는 진정한 기하학은 오직 하나 바로 유클리드기하학뿐이라고 생각했다.

Ⅳ. 非유클리드 기하학의 논리적 구조

앞에서 간단히 말했지만 유클리드 기하학은 오랫동안 별 탈 없이 전수되어왔다. 그러나 전혀 문제가 없었던 것은 아니었다. 여러 세기에 걸쳐 많은 수학자들은 특히 Euclid의 제 5공준에 대해서 의심을 품었다. 제 5공준은 다음과 같이 도식화된다.



위의 도형에서 보는 바와 같이 제 5공준은 한 직선이 다른 두 직선과 만나서 어느 한 쪽에서의 두 내각의 合이 두 직각보다 작은 두 내각을 이루면 그들 두 직선을 한없이 연장시킬 때 그들의 내각이 있는 쪽에서 두 직선은 반드시 만난다는 것이다. 이 공준은 "주어진 직선 밖에 있는 한 점을 지나 그 직선과 나란한 직선을 하나 그리고 오직 하나만을 그을 수 있다"라는 원리와 논리적으로 同値가 된다. 이 원리는 Playfair 公理라고 불리기도 하지만 18세기에는 이 공리가 Euclid의 제 5공준을 대신하는 것으로 광범위하게 사용되었고 그 결과 Euclid의 제 5공준은 평행선의 공준으로 잘못 일컬어지게 되었다.

아뭏든, 제 5공준은 한두 가지 문제점을 가지고 있음에 틀림 없다. 첫째, 다른 공준과 달리 복잡해서 자명하지 못하다. 둘째, 다른 공준과 독립해 있지도 않으며 오히려 정리의 특성을 갖고 있는 것 같다. 그래서 이를 해결하기 위한 여러 시도 끝에 드디어 19세기에 Lobachevsky가 제 5공준을 부정하는 공리를 전제로 하여 새로운 기하학을 수립했다. 그의 기하학의 구조는 다음과 같다.

주어진 직선 밖의 한 점을 지나 두개 이상의 나란한 직선을 그을 수 있다(P라고 하자).

위의 P를 받아들일 때 나타나는 새로운 명제 또는 정리는 다음과 같다.

1. 삼각형의 내각의 合은 두 직각보다 작다.
2. 두 직각과 삼각형의 내각의 합의 차는 그 삼각형의 넓이에 비례한다.
3. 원주와 그 지름과의 비는 π보다 크다.

Lobachevsky가 그의 기하학을 수립한 후 얼마 있다가 또 다른 非유클리트 기하학이 등장했다. 그것은 Riemann에 의해서였다. Riemann 기하학은 Euclid의 제5공준뿐만 아니라 제2공준도 부정하는 立場에서 출발했다. 그의 기하학의 중요한 골격은 다음과 같다.

주어진 직선 밖의 한 점을 지나 그 직선에 평행한 선을 그을 수 없다(Q라고 하자, 제5공준의 부정).

선분은 얼마든지 연장될 수 있지 않다(S라고 하자, 제2공준의 부정).

위의 Q와 S를 받아드릴 때 연역되는 정리는 다음과 같다.

1. 삼각형의 내각의 合은 180°보다 크다. 그 크기는 삼각형의 면적에 비례한다.
2. 원주와 그 지름과의 비는 π보다 작다.

수학자들은 Lobachevsky 기하학과 Riemann 기하학을 Gauss의 表現대로 非유클리드 기하학이라고 한다. 두 기하학은 물론 서로 다르다. 그러나 서로 다른 전제에서 서로 다른 기하학적인 정리들을 연역하는 點에 있어서는 같다.

우리는 앞에서 유클리드 기하학의 논리적 결함을 지적하였다. 유클리드 기하학의 논리적 妥當性은 완전히 그 논리적 形式에 의해 확보되는 것이 아니라 때로는 直觀이나 또는 어떤 기본적인 용어의 의미에 의해 결정되기도 한다는 것을 지적하였다. 이외에도 많은 문제점이 있다는 것은 말할 필요가 없다.

事實 非유클리드 기하학의 두 體系가 19세기에 구축되었지만 한 때에는 엉거주춤한 상태에 있었다. 좀더 정확히 말해 非 유클리드 기하학의 엄밀성이나 타당성이 한동안 완전히 증명되거나 결정되지 아니한 상태에 머물러 있었던 것이다. 따라서 논리적 엄밀성이나 타당성을 확립하는 것이 긴급한 과제가 되었다. 더구나 傳統 유클리드 기하학의 연역성이나 엄밀성에 對한 反省 내지 비판은 非유클리드 기하학의 체계뿐만 아니라 유클리드 기하학의 체계도 올바르게 해야 한다는(또 다른 종류의) 움직임이나 계기를 마련하는 데 결정적인 역할을 하였던 것이다.

이러한 긴급한 과제를 해결하려는 의식과 또, 새로운 계기가 나타남에 따라 수학자들은 기하학의 연역적 엄밀성이나 타당성을 완전히 갖기 위해서는 전보다 더 추상적인 기하학의 체계를 세

우는 것이 무엇보다도 필요하다고 생각하게 되었다. 그래서 그들은 두 가지의 새로운 획기적인 方法에 의거하게 되었다. 그들이 취한 첫째 방법은 Euclid의 기하학의 방법과는 달리 공준이나 공리가 自明할 뿐만 아니라 진리이어야 한다는 생각을 버리는 것이었다. 그리고 둘째 방법은 기본적인 용어에 對한 의미를 부여하지 않는 것이었다. 다시 말해 기본적인 용어에 對한 정의를 하지 않는 것이었다.[20]

위와 같은 두 가지 方法에 의존하는 의도는 무엇보다도 기하학의 체계를 완전히 논리적 形式에 의해 타당할 수 있는 연역적 체계를 세우는 데 있다. 공준이나 공리의 진위 여부를 묻지 않는다거나 또는 기본적인 용어에 對한 정의를 하지 않는 것은 기하학의 體系를 意味論的인方法에 의존하지 않고 오직 形成의 規則이나 變形의 규칙에만 의존하여 體系化하는 文章論的 方法에 의존하는 것이라 말할 수 있다. 이러한 方法에 있어서 우리가 發見할 수 있는 것은 體系內의 形式的 일관성이나 연역성 내지 타당성 뿐이지 意味나 해석은 아니다. 그리고 명제 끼리의 관계를 따지는 것이 아니라 명제함수간의 관계를 따지는 것이다. 이렇게 기하학의 체계가 구성된 것을 해석되지 않은 기하학의 체계(uninterpreted system of geometry)라고 한다.

그런데 19세기에 Lobachevsky와 Riemann의 기하학이 등장한 후 수학자들이 기하학의 일관성이나 무모순성의 문제를 다루는 방법은 실제로 相對的인 일관성의 증명 방법(relative proof of consistency)이었다. 쉽게 말해, 유클리드 기하학의 일관성이 증명되면 이에 準해 Lobachevsky 기하학이나 Riemann 기하학의 체계도 일관성이 있음을 보이는 방법이었다. 이러한 方法은 절대적이지 못하다. 문자 그대로 相對的인 방법일 뿐이요, 또한 유클리드 기하학의 model을 준거로 하는 방법일 뿐이다.

筆者는 여러 종류의 기하학의 체계가 文章論的 方法에 의거하여 모순 없는 체계로 구성될 수 있다고 생각한다. 그리고 동시에 相對的인 증명 방법은 문자 그대로 상대성의 제약을 면하지 못하나 非 유클리드 기하학의 일관성을 보이는 데 있어서 부분적으로 적용될 수 있다고 믿는다. 여하간 필자는 유클리드 기하학과 비유클리드 기하학이 동시에 연역적으로 성립될 수 있다고 생각한다. 다만, 문제는 그들의 체계를 어떻게 해석하느냐가 매우 중요하다고 생각된다. 예를 들어, Riemann기하학을 完全히 文章論으로 體系化하면 形式的인 타당성은 성립될 수 있다. 그러나 Riemann 기하학을 기본적인 용어를 어떻게 해석하는가에 따라 Riemann기하학은 참일 수도 있고 거짓이 될 수도 있다. 유클리드 기하학이나 비유클리드 기하학이나 모두 타당한 체계를 갖출 수 있다. 그러나 그들의 眞僞性은 우리들의 해석 여하에 많이 左右된다.

V. 산수 이론의 논리적 구조

역사의 우연이긴 하지만 에짚트로부터 희랍에 수입된 기하학이 추상성, 논리성, 그리고 공리

20) *Ibid.*, pp. 40-41.

성을 가지고 발전한 데 비해 바비로니아, 인도, 그리고 아랍에서 시작된 산수는 추상성과 논리성이 희박했고 理論的이기보다는 실제적이었다. 간단히 말해, 연역적인 체계를 갖추지 못했다.

數에 관한 이론이 체계화 내지 공리화된 것은 19세기 말과 20세기 초에 Dedekind와 Peano에 의해서였다. 특히 Peano의 공헌은 매우 컸다. 그는 산술의 체계를 세우기 위해 (특히 자연수에 대한 체계를 위해) 다음의 다섯 가지 公理를 제시했다.

1. 영(zero)은 자연수이다.
2. 어떠한 자연수의 後者(또는 계승자)도 역시 자연수이다.
3. 서로 다른 자연수는 결코 같은 후자를 갖지 않는다.
4. 영은 어떤 자연수의 후자도 아니다.
5. 만일 어떠한 성질이 영에 관하여 성립하고 또한 그 성질이 어떤 하나의 자연수에 대하여 성립할 때 반드시 그 후자에 관하여 성립한다면, 그 성질은 모든 자연수에 관하여 성립한다.

위에서 영을 0, 모든 자연수의 집합을 Nr, 후자(계승자)를 Sc.로 표시하고 그리고 한 자연수와 다른 자연수를 x, y로 또 성질을 A로 표시하면 위의 다섯 가지 공리는 다음과 같이 기호화될 수 있다.

1. $O \in Nr$
2. $(x): x \in Nr \supset Sc(x) \in Nr$
3. $(x)(y): x \in Nr \;\; y \in Nr \supset : Sc(x) = Sc(y) \supset x = y$
4. $(x): x \in Nr \supset Sc(x) \neq 0$
5. $(A):. O \in A. \; (x)(x \in A. \supset. Sc(x) \in A). \supset. \; Sc(x) \in A). \supset. \; A = Nr.$

Peano는 위의 공리에서 사용되는 세가지 중요한 명사(수, 0, 계승자)를 정의하지 않았다. 그가 공리를 만들고 또 이와 같이 無定義의 명사(undefined terms)를 사용하게 된 기본 목적은 첫째, 수의 체계를 기하학처럼 체계화 내지 공리화하고 둘째, 무정의의 명사를 사용함으로써 추상성을 높이고 세째, 부분적으로 논리적 엄밀성이 보장되는 연역적 타당성을 수립하고 그리고 끝으로, 더 나아가 다른 더 복잡한 수에 관한 설명도 다 이러한 공리체계에 환원시켜 가능하게 하려는 데 있었다.

그러나 Peano는 그의 목적을 完全히 달성했는가? 우리는 그의 공리 체계에 대해서 다음과 같이 비판할 수 있다. 첫째, 그의 공리 체계는 더 복잡한 계산이나 고차원의 수를 환원시켜 설명할 수 없다. 그 이유는 두 가지이다. 먼저 그의 체계만으로는 자연수나 정수에 관한 완전한 근거를 제공할 수 없다. 다시 말해, 그의 공리만으로는 $x + y$가 $y + x$와 항상 같다는 것을

증명할 수 없을 뿐만 아니라 표현할 수도 없다. 마찬가지로 $x(y+z)$가 $xy+xz$와 같다는 것을 증명하거나 표현할 수 없다. 다음으로 Peano의 공리 체계에서 高次元의 수를 환원시켜 설명하려 한다면 "집합"이나 "순서쌍(ordered pair)"과 같은 개념을 사용해야 하는데 그의 체계에서는 이들을 받아들이지 않는다. 바로 이러한 理由들 때문에 그의 체계는 가장 기본적인 자연수에 對한 논리적 연역성이 부족할 뿐만 아니라 더 고차원적인 수에 對한 만족할 만한 설명을 할 수 없다는 결점을 가지고 있다.

둘째, 위에서 지적한대로, Peano의 공리 체계에서는 세 가지 중요 개념이 정의되지 않은 채 사용되었다. 이러한 정의되지 않은 개념의 사용은, 한편으로는, 추상성을 높이는 장점을 가지긴 하지만 다른 한편으로는 단점이 될 수도 있다. 정확히 말해, Peano의 각 공리는 명제라기보다는 명제형식(propositional form)으로 되어 있다. 따라서 어떠한 의미를 부여하는가에 따라 그 진리치나 해석이 달라질 수 있다. 가령 "후자"는 후손을 의미하고 "수"는 닭을 의미한다고 생각해 보자. 이와 같은 方式으로 위의 제 2 공리를 해석하게 되면 이 공리는 "어떠한 닭의 후손도 닭이다"라는 명제와 같게 된다. 따라서 數의 理論과는 아무런 관계가 없는 것이 되어 버린다. Peano의 공리가 의미를 가지는 것은 오직 一般的인 數의 理論에 따르는 해석을 부과할 때에만 가능하다.[21] 이러한 結果는 Peano의 공리가 가지는 해석상의 제한이라고 할 수 있겠다.

Peano의 공리 체계가 가진 長點을 살리면서 동시에 그의 체계가 가진 단점을 克服하기 위해 누구보다 많은 努力을 한 사람은 Russell이다. 그는 Frege와 마찬가지로 수학에 對한 기초이론에 있어서 論理主義(logicism)를 제창했다. 그는 數에 관한 이론은 근본적으로 논리에 환원될 수 있다고 생각했다. Frege와의 다른 점은 Frege가 오직 산수만이 논리에 환원될 수 있다고 주장한 데 비해 Russell은 기하학도 논리에 환원될 수 있다고 한 데 있다. 아뭏든, 럿셀은 Peano의 弱點을 극복하기 위하여 Whitehead와 더불어 그들의 大著인 "수학의 原理"에서 산수에 관한 논리적 이론을 수립했다. 그들은 산술의 체계가 논리에 환원될 수 있다는 것을 확신했다. 그들은 기하학에 있어서 公理와 定理 사이에 성립되는 관계와 꼭같은 관계가 산술(산술뿐만 아니라 수에 관계되는 수학의 기타 영역도 포함하여)과 논리학의 기본 法則 간에도 성립된다고 생각했다. 바로 이러한 그들의 생각은 다음의 두 가지 理論的 작업에서 나타나고 있다.

첫째 작업은, 논리학의 기본 법칙들을 명료하게 形成하는 것이었다. 그들은 이러한 작업을 하는 데 있어서 먼저 Aristoteles 논리학이나 傳統 논리학의 한계점을 인정했다. 좀더 정확히 말해 전통 논리학의 규칙으로부터 산수나 기타 이와 유사한 분야의 법칙을 연역하는 것이 불가능함을 인정했다. 그래서 그들은 보다 現代化되고 또 발전된 새 논리학의 체계를 수립하려고 노력했다. Frege를 위시한 여러 학자들의 새로운 논리에 관한 이론을 받아들인 것은 말할 필요가 없다. 그런데 여기서 특기할 것은 Russell과 Whitehead가 "집합" "순서쌍"

21) J. Hospers, *op. cit.*, p. 193.

과 같은 개념뿐만 아니라 이러한 개념들을 지배하는 규칙이 모두 논리학의 범주에 속하는 것이라고 생각하고 이들을 그들의 논리체계에 도입시켰다는 점이다. 필자는 이 논문의 앞 부분에서 논리학의 범위에 관해 문제가 있음을 지적했다. 논리학의 외연을 지나치게 확장하면 거의 어느 것이나 논리적인 것으로 간주될 수 있다. Russell의 논리주의나 환원주의가 이러한 위험에 빠질 수 있다는 비판을 이미 소개했다.

논리학의 범주를 어디에 限定하는가 하는 문제는 메타논리학의 중요한 문제이다. Russell과 달리 Quine과 같은 철학자들은 집합이나 집합론이 논리학의 분야가 될 수 없다고 주장했다.[22)] 바로 이 점에서 우리는 觀點上의 커다란 차이를 발견하게 된다. 집합론이 수학의 영역에서 최초로 체계적으로 연구된 것은 Cantor에 의해서였다. 그것도 19세기에 이르러서였다. 그러나 논리학의 역사를 보면 다소 불분명하지만 古代로부터 집합의 개념이 사용되었음을 알 수 있다. 이러한 근거에서 필자는 Quine보다는 Russell의 입장에 더 동조하고자 한다. 집합에 관한 이야기는 논리학의 영역에서 먼저 시작되었지만 후에 수학의 영역에서 體系가 형성되었고 또 오늘날에는 수학의 한 영역으로 뿌리를 내렸다고 말하는 것이 더 정확하지 않나 생각된다.

둘째 작업은, 논리학의 법칙으로부터 수의 理論에 관한 법칙이 연역될 수 있게 하는 수의 이론에 있어서의 핵심적인 개념들을 정의하는 것이었다. 이러한 범주에 속하는 것으로는 영(0), 계승자, 자연수, +, 그리고 ×와 같은 것을 들 수 있다. Russell과 Whitehead는 자연수를 집합의 집합으로 정의하고 0을 모든 공집합의 집합으로 정의했다. 그리고 이에 準하여 1을 정의하고 2를 정의해 나갔다. 그들이 취한 방법은 Peano의 方法과 부분적으로 유사하다. 그러나 Peano의 방법과 달리 그들은 처음부터 확고한 논리적 체계를 세웠고 또 집합이나 순서쌍과 같은 개념들에 법칙을 부과하는 보다 발전된 논리의 체계를 세움으로써 Peano의 공리뿐만 아니라 수의 여러 가지 법칙을 연역할 수 있는 보다 포괄적인 체계를 세웠던 것이다.

그러나 Russell과 Whitehead가 세운 수학에 관한 논리적 체계에도 커다란 문제점이 있음이 발견되었다. 그것은 무엇보다도 집합의 逆理(paradox), 더 정확히 말해, Russell의 역리(Russells' paradox.) 때문이었다. 물론, 집합론에는 Russell의 역리 이외에도 다른 역리가 있다. Cantor의 역리, Brauli-Forti의 역리 등이 있다. 그런데 이러한 여러 역리 가운데 가장 중요하고 또 수학의 논리적 체계의 수립을 주장하는 학자들에게 가장 심각한 타격을 준 역리는 무엇보다도 Russell의 역리였다. 논리주의자들은 수학의 기초가 곧 논리라고 믿는다. 그들은 수학의 체계는 공리화될 수 있고 수학에 對한 이론이나 정리는 논리로부터 연역되거나 논리에로 환원될 수 있다고 주장한다. 그리고 그들은 특히 "집합"과 같은 것을 논리의 일부분으로 간주하고 수에 對한 이론과 정리를 집합과 같은 개념 또는 논리적 체계로부터 연역하려고 노력했다. 그런데 바로 수학의 기초가 되는 집합이나 집합론에 모순이나 逆理가 있다는 것은 논리주의에 결정적인 타격이 아닐 수 없다. 토대가 완전히 무너지는 것과 진배 없다. 모순된 체계로부터 어떠한

22) Quine, *Philosophy of Logic* (Prentice-Hall, 1970), p. 64f.

結論이라도 다 연역될 수 있다. 이것은 바꾸어 말해 어떠한 결론도 연역할 수 없다는 것과 같다.

Russell의 역리는, 간단히 말해, 집합의 종류를 自體集合과 非自體集合으로 구분할 때 생기는 집합의 역리이다. 이 역리에 대한 상세한 설명은 이미 여러 논문이나 책에서 마련되었기 때문에 여기서는 되풀이 하지 않겠다. 그러나 중요한 요점만 요약하면, 그 自體의 원소이면서 동시에 원소가 아닌 어떤 집합 k가 있다는 것이다. 이것은 더 말할 필요 없이 역리이다. 이러한 Russell의 역리는 아이로니칼하게 누구보다도 논리주의를 바탕으로 수학의 체계를 세우라고 한 Frege에게 가장 결정적인 타격을 주었다.

그러나 Russell은 자신이 발견한 Russell의 역리뿐만 아니라 다른 종류의 역리도 함께 해결될 수 있다고 주장했다. 그는 여러 종류의 逆理가 惡循環의 原理(the vicious principle) 즉 "어떤 모임(collection)이 전체를 가지고 있을 때 만약 그 모임이 그 전체로써만 정의될 수 있는 요소를 가진다면 그 모임은 전체를 가지고 있지 않다"라는 원리를 위배하기 때문에 생기는 것이라고 진단했다. 그리고 그는 이에 역리를 해결하기 위해 類型의 理論(the theory of types)을 대안으로 제시했다. 그는 그의 유형의 이론이 건전한 常識과 일치하며 역리를 근본적으로 해결하는 좋은 이론이라고 낙관했다(후에 그의 태도가 부분적으로 달라졌지만). 그러나 數理哲學을 연구한 사람이라면 거의 누구나 다 시인하는 바와 같이 그의 유형론은 문제를 해결하는 것보다는 더 많은 문제를 야기시키는 것이었다. 한 마디로 그의 유형론은 성공했다기보다는 실패했다고 말할 수 있다. Russell의 유형론 이외에도 다른 몇 가지 이론이 등장했다. 그러나 어떤 이론도 역리를 충분히 해결하기에는 너무나 미흡했다.

19세기 말부터 20세기 중반에 이르기까지 여러 학자들이 나와 수학의 基礎論 확립을 위해 많은 노력을 했다. Frege와 Russell을 위시한 논리주의자들과 Brouwer를 중심으로 하는 直觀主義者들이 이러한 노력을 한 사람들이었다. 그러나 그들의 노력은 실패하고 말았다. 논리주의의 단점은 이미 지적한 바와 같다. 그리고 直觀主義의 단점은 무엇보다도 배중률을 배척한 데 있었다. 이러한 두 종류의 큰 理論들이 지니는 단점을 극복하려고 나선 사람이 바로 Hilbert이다.

Hilbert는 形式主義(formalism)를 내세웠다. 그는 우선 직관주의자들이 배중율을 무시하는 것을 "수학자로부터 배중률을 쓰지 못하게 하는 것은 말하자면 천문학자에게서 망원경을 빼앗는다든가 권투 선수에게 주먹의 사용을 금하는 것과 같은 것이다. 배중률을 사용하지 않는 것은 수학의 전반을 집어치우는 것과 같다"라고[23] 비판했다. 그리고 그는 논리주의에도 신랄한 비판을 퍼부었다. 그는 論理 위에서 數를 건설한다는 것은 순환논법적이라고 했다. 그는 논리학의 전개 자체가 실제로 수학적 아이디어를 품고 있으며 고전 수학이 보존되기 위해서는 無限公理와 같은 超論理的인 공리들이 여하간 도입되어야 하므로 수학에의 올바른 접근은 논리학과 수학 둘 다의 개념들과 공리들을 표현해야 한다고 주장했다. Hilbert에 의하면 수학은 논

23) M. Klein, *Mathematics: The Loss of Certainty* (朴世熙 역, 수학의 확실성), p. 294

리의 결과가 아니고 自律的인 것이다. 그리고 수학은 논리만으로부터 이끌어 낼 수 없기 때문에 각 분야는 논리학과 수학 모두의 적절한 공리를 갖추어야 하는 것이다.

우리는 앞에서 Quine이 집합은 논리의 분야가 아니라고 말함으로써 수학을 논리 위에서 정초하려는 논리주의에 비판을 가했다는 사실을 언급했다. 그런데 Hilbert는 Quine과는 달리 수학을 논리 위에 정초하려는 시도는 순환논법의 오류를 범하는 것이라고 비판했다. 만약 Quine의 비판보다 Hilbert의 비판이나 논의가 더 올바른 것이라면 수학을 논리 위에다 정초하려는 학자들의 시도는 모두 수포로 돌아가게 된다..

여하간 形式主義에 입각한 Hilbert는 수학을 논리 위에 정초하려는 작업을 일찍부터 포기했지만 수학적 體系의 일관성이나 무모순성을 강조하는 點에 있어서는 논리주의자들의 입장과 별다른 것이 없었다. 그는 對象言語와 上級言語(meta-language)를 구분하여 수학의 體系를 철두철미 形式化 내지 추상화하였다. 그리고 이러한 초수학적 작업을 거쳐 수의 理論에 있어서 일관성뿐만 아니라 完全性까지도 확보할 수 있다고 주장했다.

그러한 Hilbert의 努力도 또한 失敗했다. 그것은 바로 Gödel의 不完全性理論 때문이었다. 이미 앞에서 不完全性의 개념을 밝혔지만 Gödel의 이론은 두 가지의 중요한 함축적 의미를 가지고 있다. 그런데 그의 두 가지의 함축적 의미 가운데 논리주의와 관련하여 중요한 것은 바로 논리적 일관성과 完全性은 兩立不可能하다는 것이다. 수학을 논리 위에 정초하려는 作業이나 수학을 公理的 體系로 구축하려는 작업이나 다 일관성뿐만 아니라 完全性까지도 추구한다. 앞에서도 말했지만 Russell은 그의 「*Principia Mathematica*」에서 完全性의 문제에 신경을 쓰지 않았다. 그러나 Hilbert는 자신만만하게 그의 超數學的 작업을 통해 일관성과 완전성을 동시에 확보할 수 있다고 주장했다. 그런데 바로 그러한 주장이 Gödel에 의해 무너진 것이다.

數學은 이제 不確實性의 時代로 들어가는 것인가? Klein 교수가 말하는 것처럼[24] 이제 수학은 확실성을 잃은 것이 아닐까? 필자는 기하학이나 산수에 관한 이론을 논리 위에 정초하려는 작업은 커다란 난관에 봉착했다고 생각한다. Frege와 Russell의 주장은 크게 흔들리고 있다고 생각한다. W. Barrett 교수가 말하는 것처럼 Kant의 antinomie, Heisenberg의 不確定性理論 그리고 Gödel의 不完全性理論은 人間 理性의 限界와 理論의 限界를 말해 주는 것이 아닐까?

24) 朴世熙, 위의 책, 제 12장 참조.